УДК 621.866:531.3

В.В. ОФІЙ, канд. техн. наук, доц.;
А.С. РАХМАНИЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ», м. Харків

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ В ТРИМАСОВИХ СИСТЕМАХ

В статті розглядаються тримасові динамічні системи механізму піднімання. Приводиться система диференційних рівнянь, надається її аналітичний розв'язок, амплітуди, частоти та часткові розв'язки.

The article deals with three mass lifting gears. The system of differential equation, its analytical solution, amplitudes, frequencies, end particular solutions are given.

З метою визначення навантажень у кількох елементах валопроводів, або в канатах та деталях гакової підвіски одночасно, необхідно розглядати розрахункові схеми з числом мас більше двох. З найбільш простих розрахункових схем цим вимогам відповідає тримасова система з двома пружними зв'язками.

Розглянемо тримасову розрахункову схему механізму піднімання з двома пружними зв'язками, яка здійснює обертальний рух. При обертанні рухомі маси характеризуються моментами інерції, навантаження – крутними моментами, пружність – коефіцієнтами жорсткості при обертанні. До основних режимів роботи механізму піднімання можна віднести такі:

1 – дія двигуна на першу масу при розгоні вгору;
2 – гальмування першої маси в кінці піднімання;
3 – гальмування другої маси в кінці піднімання;
4 – гальмування третьої маси в кінці піднімання;
5 – вільний вибіг при підніманні;
6 – дія двигуна на першу масу при розгоні вниз;
7 – гальмування першої маси в кінці опускання;
8 – гальмування другої маси в кінці опускання;
9 – гальмування третьої маси в кінці опускання;
10 – вільний вибіг при опусканні;
11 – випадок гальмівного спуску.

Різні випадки гальмування мас в механізмі піднімання відповідають різним схемам розміщення гальмівного шківа. Шостий випадок типовий для механізмів піднімання з малою вантажопідйомністю, а останній – для механізмів з великою вантажопідйомністю.

Розглянемо перший випадок, тобто дію двигуна на першу масу при розгоні вгору. Гальмівний шків розташований на вільному валі редуктора. (рис. 1)

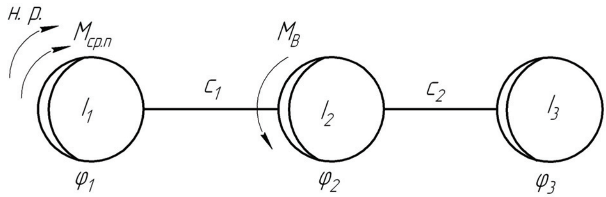

Рис. 1. Розрахункова схема механізму піднімання: I_1, I_2, I_3 – моменти інерції мас відносно вісі обертання; c_1, c_2 – коефіцієнти жорсткості першого та другого зв'язків; φ_1, φ_2, φ_3 – кути повороту мас; $M_{ср.п.}$ – середньопусковий момент двигуна; M_B – момент від дії сили ваги вантажу

При складанні диференціальних рівнянь пружних коливань розглянемо кожну масу окремо.

На першу масу I_1 (рис 2, а) діють такі моменти: динамічний момент $I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1$, середньопусковий момент двигуна $M_{ср.п.}$ та момент пружного зв'язку $M_{12} = c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$.

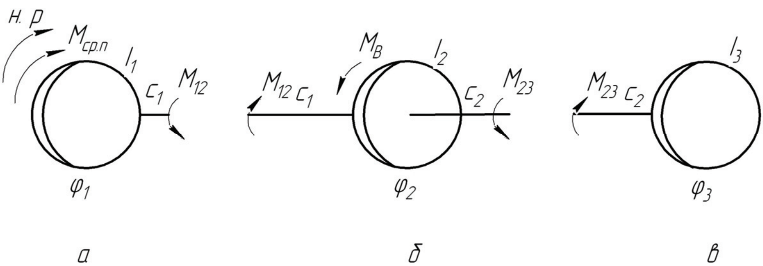

Рис. 2. Схеми навантажень, які діють при розгоні механізму піднімання вгору відповідно на маси: а – на першу масу I_1, б – на другу масу I_2, в – на третю масу I_3

На другу масу (рис. 2, б) діють чотири моменти: динамічний момент $I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2$, момент від сили ваги вантажу M_B, момент першого M_{12} та другого пружного зв'язку M_{23}.

На третю масу (рис. 2, в) діє динамічний момент $I_3 \cdot \ddot{\varphi}_3$ та момент другого пружного зв'язку M_{23}.

Система диференціальних рівнянь руху матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_{ср.п.} - c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2), \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) - c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) - M_B, \\ I_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3). \end{cases} \tag{1}$$

Після нескладних перетворень в системі (1) можна отримати такі рівняння пружних коливань:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{M_{ср.п.}}{I_1} - \dfrac{c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}{I_1} - \dfrac{c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}{I_2} + \dfrac{c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)}{I_2} + \dfrac{M_B}{I_2}, \\ \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_3 = \dfrac{c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}{I_2} - \dfrac{c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)}{I_2} - \dfrac{M_B}{I_2} - \dfrac{c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3)}{I_3}. \end{cases} \quad (2)$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \\ x_2 = \varphi_2 - \varphi_3. \end{cases} \quad (3)$$

Тоді систему (2) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot \left(\dfrac{1}{I_1} + \dfrac{1}{I_2} \right) \cdot x_1 + \dfrac{c_2}{I_2} \cdot x_2 + \dfrac{M_{ср.п.}}{I_1} + \dfrac{M_B}{I_2} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1, \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{c_1}{I_2} \cdot x_1 - c_2 \cdot \left(\dfrac{1}{I_2} + \dfrac{1}{I_3} \right) \cdot x_2 - \dfrac{M_B}{I_2} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2, \end{cases} \quad (4)$$

де: $a_{11} = -c_1 \cdot \left(\dfrac{1}{I_1} + \dfrac{1}{I_2} \right)$; $a_{12} = \dfrac{c_2}{I_2}$; $b_1 = \dfrac{M_{ср.п.}}{I_1} + \dfrac{M_B}{I_2}$; $a_{21} = \dfrac{c_1}{I_2}$; $a_{22} = -c_2 \cdot \left(\dfrac{1}{I_2} + \dfrac{1}{I_3} \right)$; $b_2 = -\dfrac{M_B}{I_2}$.

Диференціюючи двічі перше рівняння системи (4), матимемо:

$$x_1^{(IV)} = a_{11} \cdot \ddot{x}_1 + a_{12} \cdot \ddot{x}_2 = a_{11} \cdot \ddot{x}_1 + a_{12} \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2) + a_{12} \cdot b_2 =$$
$$= a_{11} \cdot \ddot{x}_1 + a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 + a_{12} \cdot b_2.$$

Але

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}} \cdot (\ddot{x}_1 - a_{11} \cdot x_1 - b_1). \quad (5)$$

Тоді диференційне рівняння вимушених коливань визначатиметься таким виразом

$$x_1^{(IV)} - (a_{11} + a_{22}) \cdot \ddot{x}_1 - (a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) \cdot x_1 = a_{12} \cdot b_2 - a_{22} \cdot b_1. \quad (6)$$

Це диференційне рівняння є лінійним неоднорідним диференційним рівнянням четвертого порядку з постійними коефіцієнтами та постійною правою частиною.

Для розв’язання однорідного диференційного рівняння складемо відповідне йому характеристичне

$$\lambda^4 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda^2 - (a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) = 0.$$

Введемо заміну $r = \lambda^2$.

Тоді матимемо

$$r^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot r - (a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) = 0.$$

Корені цього рівняння

$$r_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4 \cdot (a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22})}}{2} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot a_{12} \cdot a_{21}}}{2} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{D}\right).$$

Дискримінант рівняння $D > 0$, тому що $(a_{11} - a_{22})^2 > 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$.

Перший корінь рівняння буде позитивний в тому випадку, якщо $D > (a_{11} + a_{22})^2$, тобто коли $(a_{11} - a_{22})^2 + 4 \cdot a_{12} \cdot a_{21} > (a_{11} + a_{22})^2$.

З’ясуємо цю умову

$$a_{11}^2 - 2 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + a_{22}^2 + 4 \cdot a_{12} \cdot a_{21} > a_{11}^2 + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + a_{22}^2.$$

$$4 \cdot (a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}) > 0.$$

Але

$$a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = -c_1 \cdot c_2 \cdot \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3} < 0.$$

Значить перший корінь рівняння r_1 – від’ємний, тобто

$$r_1 = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2} < 0.$$

Вочевидь, що

$$r_2 = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2} < 0.$$

Корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{r_1} \pm i \cdot \omega_1,$$
$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{r_2} \pm i \cdot \omega_2,$$

де: $i^2 = -1,\ \omega_1^2 = -\frac{1}{2}\cdot\left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}\right),\ \omega_2^2 = -\frac{1}{2}\cdot\left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}\right).$

Загальний розв’язок однорідного диференційного рівняння буде відповідати кореням характеристичного рівняння і матиме такий вигляд:

$$x_1\left(t\right) = A_{11}\cdot\sin\left(\omega_1\cdot t\right) + A_{12}\cdot\cos\left(\omega_1\cdot t\right) + B_{11}\sin\left(\omega_2\cdot t\right) + B_{12}\cdot\cos\left(\omega_2\cdot t\right). \quad (7)$$

Частковий розв’язок для першого зв’язку буде таким

$$D_{12} = \frac{a_{22}\cdot b_1 - a_{12}\cdot b_2}{a_{12}\cdot a_{21} - a_{11}\cdot a_{22}} \quad (8)$$

Використовуючи означення системи (4) в виразі для наступного розв’язку (8), матимемо:

$$D_{12} = \frac{1}{c_1\cdot\left(I_1 + I_2 + I_3\right)}\cdot\left[I_1\cdot M_B + \left(I_2 + I_3\right)\cdot M_{ср.п}\right] =$$
$$= \frac{1}{c_1\cdot\left(I_1 + I_2 + I_3\right)}\cdot\left[I_1\cdot M_B + I_2\cdot M_B + I_3\cdot M_B + \left(I_2 + I_3\right)\cdot M_{ср.п} - I_2\cdot M_B - I_3\cdot M_B\right] = \quad (9)$$
$$= \frac{1}{c_1}\left[M_B + \left(M_{ср.п} - M_B\right)\cdot\frac{I_2 + I_3}{I_1 + I_2 + I_3}\right].$$

Загальний розв’язок неоднорідного диференційного рівняння (6) буде таким

$$x_1\left(t\right) = A_{11}\cdot\sin\left(\omega_1\cdot t\right) + A_{12}\cdot\cos\left(\omega_1\cdot t\right) + B_{11}\cdot\sin\left(\omega_2\cdot t\right) + B_{12}\cdot\cos\left(\omega_2\cdot t\right) + D_{12}. \quad (10)$$

Рішення другого диференційного рівняння системи (4) знайдено з допомогою співвідношення (5).

Продиференціюємо двічі (10), а потім підставимо цей результат в (5)

$$\ddot{x}_1\left(t\right) = -\omega_1^2\cdot A_{11}\cdot\sin\left(\omega_1\cdot t\right) - \omega_1^2\cdot A_{12}\cdot\cos\left(\omega_1\cdot t\right) -$$
$$-\omega_2^2\cdot B_{11}\cdot\sin\left(\omega_2\cdot t\right) - \omega_2^2\cdot B_{12}\cdot\cos\left(\omega_2\cdot t\right),$$

$$x_2(t)=\frac{1}{a_{12}}\cdot(\ddot{x}_1-a_{11}\cdot x_1-b_1)=\frac{1}{a_{12}}\cdot\Big(-\omega_1^2\cdot A_{11}\cdot\sin(\omega_1\cdot t)-\omega_1^2\cdot A_{12}\cdot\cos(\omega_1\cdot t)-$$
$$-\omega_2^2\cdot B_{11}\cdot\sin(\omega_2\cdot t)-\omega_2^2\cdot B_{12}\cdot\cos(\omega_2\cdot t)-a_{11}\cdot A_{11}\cdot\sin(\omega_1\cdot t)-a_{11}\cdot A_{12}\cdot\cos(\omega_1\cdot t)-$$
$$-a_{11}\cdot B_{11}\cdot\sin(\omega_2\cdot t)-a_{11}\cdot B_{12}\cdot\cos(\omega_2\cdot t)-a_{11}\cdot D_{12}-b_1\Big)= \quad (11)$$
$$=-\frac{\omega_1^2+a_{11}}{a_{12}}\cdot\Big(A_{11}\cdot\sin(\omega_1\cdot t)+A_{12}\cdot\cos(\omega_1\cdot t)\Big)-$$
$$-\frac{\omega_2^2+a_{11}}{a_{12}}\cdot\Big(B_{11}\cdot\sin(\omega_2\cdot t)+B_{12}\cdot\cos(\omega_2\cdot t)\Big)-\frac{a_{11}}{a_{12}}\cdot D_{12}-\frac{b_1}{a_{12}}.$$

Це рішення можна переписати у такому вигляді:

$$x_2(t)=A_{22}\cdot\sin(\omega_1\cdot t)+A_{23}\cdot\cos(\omega_1\cdot t)+B_{22}\cdot\sin(\omega_1\cdot t)+B_{23}\cdot\cos(\omega_1\cdot t)+D_{23}, \quad (12)$$

де $A_{22}=-A_{11}\cdot\dfrac{\omega_1^2+a_{11}}{a_{12}}$; $A_{23}=-A_{12}\cdot\dfrac{\omega_1^2+a_{11}}{a_{12}}$; $B_{22}=-B_{11}\cdot\dfrac{\omega_2^2+a_{11}}{a_{12}}$;

$B_{23}=-B_{12}\cdot\dfrac{\omega_2^2+a_{11}}{a_{12}}$;

$$D_{23}=-\frac{a_{11}}{a_{12}}\cdot D_{12}-\frac{b_1}{a_{12}}=-\frac{a_{11}}{a_{12}}\cdot\frac{a_{22}\cdot b_1-a_{12}\cdot b_2}{a_{12}\cdot a_{21}-a_{11}\cdot a_{22}}-\frac{b_1}{a_{12}}=\frac{a_{11}\cdot b_2-a_{21}\cdot b_1}{a_{12}\cdot a_{21}-a_{11}\cdot a_{22}}.$$

З урахуванням означень (4), частковий розв'язок другого зв'язку запишеться так

$$D_{23}=\frac{1}{c_2}\cdot\left[\left(M_{ср.п}-M_B\right)\cdot\frac{I_3}{I_1+I_2+I_3}\right]. \quad (13)$$

Загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння (7) можна "звернути", тобто записати у скороченому вигляді

$$A_{11}\cdot\sin(\omega_1\cdot t)+A_{12}\cdot\cos(\omega_1\cdot t)=\sqrt{A_{11}^2+A_{12}^2}\cdot\cos(\omega_1\cdot t+\varphi_1),$$
$$B_{11}\cdot\sin(\omega_2\cdot t)+B_{12}\cdot\cos(\omega_2\cdot t)=\sqrt{B_{11}^2+B_{12}^2}\cdot\cos(\omega_2\cdot t+\varphi_2).$$

Нехтуючи фазами коливань φ_1 та φ_2, рішення (10) з урахуванням означень (3) матиме спрощений вигляд

$$x_1(t)=A_1\cdot\cos(\omega_1\cdot t)+B_1\cdot\cos(\omega_2\cdot t)+D_{12}, \quad (14)$$

де $A_1=\sqrt{A_{11}^2+A_{12}^2}$; $B_1=\sqrt{B_{11}^2+B_{12}^2}$.

Аналогічно отримаємо другий розв'язок

$$x_2(t)=A_2\cdot\cos(\omega_1\cdot t)+B_2\cdot\cos(\omega_2\cdot t)+D_{23}, \quad (15)$$

$$\text{де } A_2 = \sqrt{A_{22}^2 + A_{23}^2} = \frac{\omega_1^2 + a_{11}}{a_{12}} \cdot \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2} = \frac{\omega_1^2 + a_{11}}{a_{12}} \cdot A_1\,;$$

$$B_2 = \sqrt{B_{22}^2 + B_{23}^2} = \frac{\omega_2^2 + a_{11}}{a_{12}} \cdot \sqrt{B_{11}^2 + B_{12}^2} = \frac{\omega_2^2 + a_{11}}{a_{12}} \cdot B_1\,;$$

Останні співвідношення показують, що амплітуди коливань другого зв'язку A_2 та B_2 повністю залежать від амплітуд коливань A_1 та B_1 для першого зв'язку. При цьому слід зазначити, що A_1 та A_2 - є амплітуди низькочастотної, а B_1 та B_2 - амплітуди високочастотної складової першого та другого зв'язків відповідно.

Кругові частоти власних коливань знайдемо з допомогою наступних виразів

$$\omega_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22}\ 7\sqrt{D}\right) = -\frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22}\right) 7\,\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{12} \cdot a_{21}}$$

Підставляючи означення системи (4), матимемо:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1 + c_2}{I_2} + \frac{c_2}{I_3}\right) 7\,\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_2 - c_1}{I_2} + \frac{c_2}{I_3}\right)^2 + 4\frac{c_1 \cdot c_2}{I_2^2}}\,,$$

або

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1 + c_2}{I_2} + \frac{c_2}{I_3}\right) 7\,\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1 - c_2}{I_2} - \frac{c_2}{I_3}\right)^2 + 4\frac{c_1 \cdot c_2}{I_2^2}}\,. \qquad (16)$$

Для зрівняння приведемо формули кругових частот власних коливань тримасових систем, які отримано в роботі [2]

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1 + c_2}{I_2} + \frac{c_2}{I_3}\right) 7\,\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1 + c_2}{I_2} + \frac{c_2}{I_3}\right)^2 - \frac{4 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot I}{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3}} \qquad (16')$$

де $I = I_1 + I_2 + I_3$.

Формули (16) та (16') зовні відрізняються лише виразом для дискримінанту, але якщо його спростити, то ці вирази будуть повністю співпадати.

Амплітуди коливань A_i та B_i знайдемо виходячи з умови, що при $t = 0$ $M_{12} = M_{ср.п}$ та $M_{23} = 0$. Рішення (14), (15) та їх другі похідні матимуть такий вигляд

$$x_1(t)\big|_{t=0} = A_1 + B_1 + D_{12},$$

$$x_2(t)\big|_{t=0} = A_2 + B_2 + D_{23},$$

$$\ddot{x}_1(t) = -A_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) - B_1 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t),$$

$$\ddot{x}_2(t) = -A_2 \cdot \omega_1^2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) - B_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t),$$

$$\ddot{x}_1(t)\big|_{t=0} = -A_1 \cdot \omega_1^2 - B_1 \cdot \omega_2^2,$$

$$\ddot{x}_2(t)\big|_{t=0} = -A_2 \cdot \omega_1^2 - B_2 \cdot \omega_2^2.$$

Підставимо ці вирази в систему (4)

$$\begin{cases} -A_1 \cdot \omega_1^2 - B_1 \cdot \omega_2^2 = -c_1 \cdot \left(\dfrac{1}{I_1} + \dfrac{1}{I_2}\right) \cdot (A_1 + B_1 + D_{12}) + \dfrac{c_2}{I_2} \cdot (A_2 + B_2 + D_{23}) + \\ + \dfrac{M_{ср.п.}}{I_1} + \dfrac{M_B}{I_2}; \\ -A_2 \cdot \omega_1^2 - B_2 \cdot \omega_2^2 = \dfrac{c_1}{I_2} \cdot (A_1 + B_1 + D_{12}) - c_2 \cdot \left(\dfrac{1}{I_2} + \dfrac{1}{I_3}\right) \cdot (A_2 + B_2 + D_{23}) - \dfrac{M_B}{I_2}. \end{cases}$$

Враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} M_{12} = c_1 \cdot x_1(t)\big|_{t=0} = c_1 \cdot (A_1 + B_1 + D_{12}) = M_{ср.п.}, \\ M_{23} = c_2 \cdot x_2(t)\big|_{t=0} = c_2 \cdot (A_2 + B_2 + D_{23}) = 0, \end{cases}$$

система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд гармонійних складових динамічних навантажень в пружних зв'язках тримасової розрахункової схеми матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = \dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}, \\ A_2 + B_2 = -D_{23}, \\ -A_1 \cdot \omega_1^2 - B_1 \cdot \omega_2^2 = \dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{I_2}, \\ -A_2 \cdot \omega_1^2 - B_2 \cdot \omega_2^2 = \dfrac{M_{ср.п.} - M_B}{I_2}. \end{cases} \tag{17}$$

Якщо виразити амплітуди високочастотних складових B_1 та B_2 через амплітуди низькочастотних складових A_1 та A_2, рішення системи (17) буде таким

$$
\begin{cases}
A_1 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left[\dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{I_2} + \left(\dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}\right)\omega_2^2\right], \\
A_2 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left(\dfrac{M_{ср.п.} - M_B}{I_2} - D_{23}\cdot\omega_2^2\right), \\
B_1 = \dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12} - \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\cdot\left[\dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{I_2} + \left(\dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}\right)\omega_2^2\right], \\
B_2 = -D_{23} - \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left(\dfrac{M_{ср.п.}}{I_2} - D_{23}\cdot\omega_2^2\right),
\end{cases} \tag{18}
$$

де $\Delta\omega^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2$.

В протилежному випадку рішення системи (17) запишеться так

$$
\begin{cases}
A_1 = \dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12} - \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left[\dfrac{M_{ср.п.} - M_B}{2} - \left(\dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}\right)\omega_1^2\right], \\
A_2 = -D_{23} - \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left(\dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{2} + D_{23}\cdot\omega_1^2\right), \\
B_1 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\cdot\left[\dfrac{M_{ср.п.} - M_B}{I_2} - \left(\dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}\right)\omega_1^2\right], \\
B_2 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left(\dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{I_2} + D_{23}\cdot\omega_1^2\right).
\end{cases} \tag{19}
$$

Враховуючи тотожність систем (18) та (19), амплітуди гармонічних складових динамічного навантаження у першому пружному зв’язку будуть визначатися такими співвідношеннями:

$$
\begin{cases}
A_1 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left[\dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{I_2} + \left(\dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}\right)\omega_2^2\right], \\
B_1 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\cdot\left[\dfrac{M_{ср.п.} - M_B}{I_2} - \left(\dfrac{M_{ср.п.}}{c_1} - D_{12}\right)\omega_1^2\right].
\end{cases} \tag{20}
$$

Амплітуди гармонічних складових динамічного навантаження у другому пружному зв’язку відповідно будуть дорівнювати

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2}\left(\dfrac{M_{ср.п.} - M_B}{I_2} - D_{23} \cdot \omega_2^2\right), \\ B_2 = \dfrac{1}{\Delta\omega^2} \cdot \left[\dfrac{M_B - M_{ср.п.}}{I_2} + D_{23} \cdot \omega_1^2\right]. \end{cases} \tag{21}$$

Формули (20) та (21) показують, що амплітуди низькочастотних складових A_1 та A_2 залежать від високої частоти ω_2, а амплітуди високочастотних складових B_1 та B_2 - від низької частоти ω_1. Крім того, амплітуди першого зв'язку (20) залежать від "своєї" жорсткості c_1, а амплітуди другого зв'язку (21) від коефіцієнту жорсткості c_2 взагалі не залежать.

Часткові розв'язки системи (2) з урахуванням означень (3) матимуть такий вигляд

$$\begin{cases} D_{12}^* = D_{12} \cdot c_1 = M_B + \left(M_{ср.п.} - M_B\right) \cdot \dfrac{I_2 + I_3}{I_1 + I_2 + I_3}, \\ D_{23}^* = D_{23} \cdot c_2 = \left(M_{ср.п.} - M_B\right) \cdot \dfrac{I_3}{I_1 + I_2 + I_3}. \end{cases} \tag{22}$$

Розв'язки (22) не залежать ні від частоти, ні від коефіцієнтів жорсткості зв'язків. Частковий розв'язок для першого зв'язку являє собою алгебраїчну суму статичного навантаження M_B та інерційної складової від дії мас I_2 та I_3, які зв'язок приводить у рух. Частковий розв'язок для другого зв'язку складається лише з інерційної складової від дії тільки маси I_3.

Список літератури: 1. *Бабаков И. М.* Теорія колебаний. – М.: Наука, 1965. **2 .** Казак С. А. Динамика мостовых кранов. – М.: Машиностроение, 1968. **3.** *Григоров О. В.*, *Офій В. В.*, *Рахманий А. С.* Динамічні навантаження у вантажопідйомних машинах: Навч. – метод. посібник. – Харків: НТУ "ХПІ", 2006.

Поступила в редколлегию 28.09.2010