

О. М. ЛИТВИН, д-р. фіз.-мат. наук, УПА,
В.М.УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ "ХП" (м. Харків)

ОПЕРАТОРИ ДВОВИМІРНОГО ФІНІТНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ОСНОВІ СПЛАЙНІВ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ, ТОЧНІ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМАХ ЗАДАНОГО ПОРЯДКУ

Досліджуються оператори обчислення двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку. Зокрема, досліджено їх інтерполяційні властивості. Наведена оцінка похибки апроксимації комплексних функцій двох дійсних змінних запропонованими операторами. Наведено приклад.

The operators of calculation of two-dimensional finite discretely-continuous Fourier Transform on the basis of splines of the first degree were investigated. These operators are precise on trigonometric polynomials of corresponding degree. Their interpolation properties are researched. The estimation of error approximating of complex functions of two real variables by the offered operators is given. The example is given.

Постановка проблеми. Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає: 1. В побудові ефективного методу відновлення коефіцієнтів Фур'є для функцій двох змінних на основі фіксованої кількості відліків наближуваної функції з використанням методу Файлона обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій і з заміною функції $f(x, y)$ сплайнами першого степеня по кожній змінній; 2. На основі отриманих операторів (при $N=M$) будуємо оператори, точні на тригонометричних поліномах порядку N

Аналіз літератури. В літературі, присвяченій перетворенню Фур'є основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є [1], [2], порівняння швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є та дискретного перетворення Хартлі [3], створення багатовимірних варіантів дискретного перетворення Фур'є [4]. Класичне двовимірне перетворення Фур'є [5, с.17]

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy,$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

в прикладних задачах, орієнтованих на комп'ютерні технології, використовують у вигляді прямого та оберненого дискретного перетворення Фур'є [1, С.495]

$$\begin{aligned}
 H(v_1, v_2) &= (N_1, N_2)^{-1} \sum_{\tau_1=0}^{N_1-1} \sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} f(\tau_1, \tau_2) \exp[-j2\pi(v_1 \tau_1 / N_1 + v_2 \tau_2 / N_2)], \\
 v_1 &= \overline{0, N_1 - 1}, \quad v_2 = \overline{0, N_2 - 1}, \\
 f(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{v_1=0}^{N_1-1} \sum_{v_2=0}^{N_2-1} H(v_1, v_2) \exp[j2\pi(v_1 \tau_1 / N_1 + v_2 \tau_2 / N_2)], \\
 \tau_1 &= \overline{0, N_1 - 1}, \quad \tau_2 = \overline{0, N_2 - 1}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Двовимірне дискретне перетворення Фур'є (1) з точки зору характеристик точності має недоліки, які розглянуто в [6].

Метою роботи є: 1) побудова операторів обчислення двовимірного фінітного дискретно – неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня по кожній змінній, з $(2M_1+1)(2M_2+1)$ вузлами (x_p, y_q) ,

$p = \overline{-M_1, M_1}, q = \overline{-M_2, M_2}$, які мали б нову, порівнянно з класичним дискретним двовимірним перетворенням Фур'є властивість – можливість формувати неперервне наближення функції по її дискретних відліках і при цьому забезпечувати більш високі характеристики точності, порівнянно з класичним двовимірним дискретним перетворенням Фур'є (при однаковій кількості вузлів); 2) побудова на їх основі (при $N = M$

$N = (N_1, N_2), M = (M_1, M_2)$) операторів, точних на тригонометричних поліномах порядку N ; 3) дослідження властивостей отриманих операторів; зокрема доведення, що ці оператори є операторами інтерполяційного типу:

$$L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_p, y_q) = f(x_p, y_q), \quad p = \overline{-M_1, M_1}, q = \overline{-M_2, M_2}, \quad M = (M_1, M_2).$$

Побудова операторів обчислення двовимірного фінітного дискретно–неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня. Для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є

$$b_{k_1, k_2}^{F, 2d}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \exp[-j(k_1 x + k_2 y)] dx dy, \quad k_1 = \overline{-N_1, N_1}, k_2 = \overline{-N_2, N_2}, \tag{2}$$

в двовимірній сумі Фур'є

$$S_N^{F, 2d}(f) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} b_{k_1, k_2}^{F, 2d}(f) \exp[j(k_1 x + k_2 y)], \quad N_1 \leq M_1, N_2 \leq M_2$$

комплексної функції дійсного аргумента $f(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y) + j \operatorname{Im} f(x, y)$;

$\operatorname{Re} f(x, y), \operatorname{Im} f(x, y) \in C^k[-\pi, \pi]^2, \quad k=1, 2, 3, \dots$ використаємо підхід запро-

понований в [7], модифікований в [8], [9], який полягає в тому що ми замінюємо $f(x, y)$ її сплайном першого степеня по кожній змінній. Введемо до розгляду двовимірний сплайн першого степеня по кожній змінній для $f(x, y)$

$$\text{Sp1}_M(f; x, y) = \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} h1(x, p1, \Delta_1) h1(y, p2, \Delta_2) f(x_{p1}, y_{p2}),$$

$$h1(x, q, \Delta_k) = (|t-1|-2|t|+|t+1|)/2, t=x/\Delta_k - q, \Delta_k = 2\pi/(2Mk+1), k=1,2, \\ (x, y) \in [-\pi, \pi]^2, x_{p1} = p1\Delta_1, y_{p2} = p2\Delta_2. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (2), отримуємо

$$b_{N,M,k1,k2}^{F,2d,Sp1}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1}, y_{p2}) \times \\ \int_{(p1-1)\Delta_1}^{(p1+1)\Delta_1} \int_{(p2-1)\Delta_2}^{(p2+1)\Delta_2} h1(x, p1, \Delta_1) h1(y, p2, \Delta_2) \exp[-j(k1x+k2y)] dx dy, \quad (4)$$

$$\Delta_1 = 2\pi e_1, e_1 = 1/(2M1+1), p1 = \overline{-M1, M1}, k1 = \overline{-N1, N1}, N1 \leq M1, \quad (5)$$

$$\Delta_2 = 2\pi e_2, e_2 = 1/(2M2+1), p2 = \overline{-M2, M2}, k2 = \overline{-N2, N2}, N2 \leq M2. \quad (6)$$

Виконавши обчислення в (4) із врахуванням (3), (5), (6) одержимо

$$b_{N,M,k1,k2}^{F,2d,Sp1}(f) = \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1}, y_{p2}) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{[1-\cos(k1\Delta_1)][1-\cos(k2\Delta_2)]}{\pi^2 k1^2 k2^2 \Delta_1 \Delta_2} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp[-j(k1 p1 \Delta_1 + k2 p2 \Delta_2)], (k1 \neq 0 \wedge k2 \neq 0) \right\} \vee \\ \vee \left[\frac{[1-\cos(k1\Delta_1)]e_2}{\pi k1^2 \Delta_1} \exp(-jk1 p1 \Delta_1), (k1 \neq 0 \wedge k2 = 0) \right] \vee \\ \vee \left[\frac{[1-\cos(k2\Delta_2)]e_1}{\pi k2^2 \Delta_2} \exp(-jk2 p2 \Delta_2), (k1 = 0 \wedge k2 \neq 0) \right] \vee \\ \vee [e_1 e_2, (k1 = 0 \wedge k2 = 0)], k1 = \overline{-N1, N1}, k2 = \overline{-N2, N2}. \quad (7)$$

Оператор

$$U_{N,M}^{F,2d,Sp1} f(x, y) = \sum_{k1=-N1}^{N1} \sum_{k2=-N2}^{N2} b_{N,M,k1,k2}^{F,2d,Sp1}(f) \exp[j(k1x+k2y)], \quad (8)$$

де $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$, дозволяє обчислювати неперервне наближення функції $f(x, y) \in C^r [-\pi, \pi]^2$; $r=1, 2, 3, \dots$ по її дискретних відліках $f(x_{p1}, y_{p2})$, $(x_{p1}, y_{p2}) \in (-\pi, \pi)^2$ При застосуванні (8) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [10, С.13], [11] для вибору необхідних M_1, M_2 для даної функції $f(x, y)$

Теорема 1. Нехай вузли і коефіцієнти кубатурної формули (4), які використовуються для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є $b_{k_1, k_2}^{F, 2d}(f)$, задовольняють умову:

$$b_{N, M, k_1, k_2}^{F, 2d, Sp1} \{ \exp [j(k_1 x + k_2 y)] \} = \delta_{k_1, p_1} \delta_{k_2, p_2} \gamma_{k_1, k_2};$$

$k_1 = \overline{-N_1, N_1}$; $k_2 = \overline{-N_2, N_2}$, $p_1 = \overline{-M_1, M_1}$, $p_2 = \overline{-M_2, M_2}$; де $\delta_{t, s}$ є символ Кронекера, $\gamma_{k_1, k_2} \neq 0$ є деякі числа. Тоді оператор (див. також [8])

$$L_{N, M}^{F, 2d, Sp1} f(v_1, v_2) = \sum_{k_1 = -N_1}^{N_1} \sum_{k_2 = -N_2}^{N_2} g_{N, M, k_1, k_2}^{F, 2d, Sp1}(f) \times \exp [j(k_1 v_1 + k_2 v_2)], (v_1, v_2) \in \mathcal{R}^2, \mathcal{R} = (-\infty, \infty), \quad (9)$$

де:

$$g_{N, M, k_1, k_2}^{F, 2d, Sp1}(f) = \frac{b_{N, M, k_1, k_2}^{F, 2d, Sp1}(f)}{b_{N, M, k_1, k_2}^{F, 2d, Sp1}[\exp [j(k_1 x + k_2 y)]]},$$

$k_1 = \overline{-N_1, N_1}$, $k_2 = \overline{-N_2, N_2}$; (10)

$$b_{N, M, k_1, k_2}^{F, 2d, Sp1}[\exp [j(k_1 x + k_2 y)]] = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{p_1 = -M_1}^{M_1} \sum_{p_2 = -M_2}^{M_2} \exp [j(k_1 x_{p_1} + k_2 y_{p_2})] \times \int_{(p_1-1)\Delta_1}^{(p_1+1)\Delta_1} \int_{(p_2-1)\Delta_2}^{(p_2+1)\Delta_2} h_1(x, p_1, \Delta_1) h_2(y, p_2, \Delta_2) \exp [-j(k_1 x + k_2 y)] dx dy =$$

$$= \left\{ \left[\frac{[1 - \cos(k_1 \Delta_1)][1 - \cos(k_2 \Delta_2)]}{\pi^2 k_1^2 k_2^2 \Delta_1 \Delta_2}, (k_1 \neq 0 \wedge k_2 \neq 0) \right] \vee \left[\frac{[1 - \cos(k_1 \Delta_1)]}{\pi k_1^2 \Delta_1}, (k_1 \neq 0 \wedge k_2 = 0) \right] \vee \left[\frac{[1 - \cos(k_2 \Delta_2)]}{\pi k_2^2 \Delta_2}, (k_1 = 0 \wedge k_2 \neq 0) \right] \vee [1, (k_1 = 0 \wedge k_2 = 0)] \right\}, k_1 = \overline{-M_1, M_1}, k_2 = \overline{-M_2, M_2}; \quad (11)$$

має такі властивості: $L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f \equiv f$, (12)

$$\text{якщо } f = \sum_{r1=-M1}^{M1} \sum_{r2=-M2}^{M2} C_{r1,r2} \exp[j(r1x+r2y)], \forall C_{r1,r2} \in \mathfrak{R}.$$

$$2^{\circ} L_{M,M}^{F,2d, Sp1} f(x_{p1}, y_{p2}) = f(x_{p1}, y_{p2}), p1 = \overline{-M1, M1}, p2 = \overline{-M2, M2}. \quad (13)$$

Доведення. Виконавши обчислення (10) з урахуванням (7), (11) одержимо

$$\begin{aligned} g_{N,M,k1,k2}^{F,2d, Sp1}(f) &= e_1 e_2 \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1}, y_{p2}) \times \\ &\times \left\{ \left[\exp[-j(k1 p1 \Delta_1 + k2 p2 \Delta_2)], (k1 \neq 0 \wedge k2 \neq 0) \right] \vee \right. \\ &\vee \left[\exp(-jk1 p1 \Delta_1), (k1 \neq 0 \wedge k2 = 0) \right] \vee \left[\exp(-jk2 p2 \Delta_2), (k1 = 0 \wedge k2 \neq 0) \right] \vee \\ &\left. \vee [1, (k1 = 0 \wedge k2 = 0)] \right\}, k1 = \overline{-N1, N1}, k2 = \overline{-N2, N2}. \quad (14) \end{aligned}$$

Тобто (9) в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} L_{N,M}^{F,2d, Sp1} f(v1,v2) &= e_1 e_2 \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1}, y_{p2}) \times \\ &\times \sum_{k1=-N1}^{N1} \sum_{k2=-N2}^{N2} \left\{ \begin{array}{l} \left[\exp[-j(k1 p1 \Delta_1 + k2 p2 \Delta_2)], (k1 \neq 0 \wedge k2 \neq 0) \right] \vee \\ \vee \left[\exp(-jk1 p1 \Delta_1), (k1 \neq 0 \wedge k2 = 0) \right] \vee \\ \vee \left[\exp(-jk2 p2 \Delta_2), (k1 = 0 \wedge k2 \neq 0) \right] \vee \\ \vee [1, (k1 = 0 \wedge k2 = 0)] \end{array} \right\} \times \\ &\times \exp[j(k1 v1 + k2 v2)], (v1, v2) \in [-\pi, \pi]^2 \quad (15) \end{aligned}$$

Перейдемо від неперервних $(v1, v2) \in [-\pi, \pi]^2$ до дискретних змінних $(u1_m, u2_n) \in (-\pi, \pi)^2$:

$$u1_m = m \Delta_Q, u1_m \in (-\pi, \pi), m = \overline{-Q, Q}, \Delta_Q = 2\pi \lambda, \lambda = 1/(2Q+1),$$

$$u2_n = n \Delta_W, u2_n \in (-\pi, \pi), n = \overline{-W, W}, \Delta_W = 2\pi \eta; \eta = 1/(2W+1).$$

Нехай виконуються умови:

$$Q = M1, N1 = M1, m = \overline{-M1, M1}, \Delta_Q = \Delta_1,$$

$$W = M2, N2 = M2, n = \overline{-M2, M2}, \Delta_W = \Delta_2.$$

Тоді $u1_m = x_m$, $u2_n = y_n$ і для (15) одержимо (при $N = M$):

$$L_{M,M}^{F,2d, Sp1} f(x_m, y_n) = e_1 e_2 \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1}, y_{p2}) \times$$

$$\times \sum_{k1=-M1}^{M1} \sum_{k2=-M2}^{M2} \left\{ \begin{array}{l} [\exp[-j(k1 p1 \Delta_1 + k2 p2 \Delta_2)] \times \\ \times \exp[j(k1 m \Delta_1 + k2 n \Delta_2)], (k1 \neq 0 \wedge k2 \neq 0)] \vee \\ \vee [\exp[-j(k1 p1 \Delta_1)] \exp[j(k1 m \Delta_1)], (k1 \neq 0 \wedge k2 = 0)] \vee \\ \vee [\exp[-j(k2 p2 \Delta_2)] \exp[j(k2 n \Delta_2)], (k1 = 0 \wedge k2 \neq 0)] \vee \\ \vee [1, (k1 = 0 \wedge k2 = 0)] \end{array} \right\} \times$$

$$\times \exp[j(k1 x_m + k2 y_n)], (x_{1m}, y_{2n}) \in (-\pi, \pi)^2, m = \overline{-M1, M1}, n = \overline{-M2, M2}. \quad (16)$$

Маючи на увазі, що

$$\sum_{m=-M}^M \exp(-im p \Delta) \exp(im k \Delta) = 0, \Delta = 2\pi / (2M + 1), m \neq k,$$

а також враховуючи, що

$$\sum_{m=-M}^M \left\{ \begin{array}{l} \exp(-im p \Delta) \exp(im k \Delta), p = m, m \neq 0, \\ 1, m = 0, \end{array} \right\} = 2M + 1, \text{ одержимо з (16)}$$

$$L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{p1}, y_{p2}) = f(k1 p1 \Delta_1, k2 p2 \Delta_2) = f(x_{p1}, y_{p2}),$$

$$p1 = \overline{-M1, M1}, p2 = \overline{-M2, M2}.$$

Твердження (13) доведене. Враховуючи однозначне зображення тригонометричного полінома степеня M за допомогою його значень в точках (x_{p1}, y_{p2}) , $p1 = \overline{-M1, M1}$, $p2 = \overline{-M2, M2}$, див. (13), можна стверджувати, що

$$\forall C_{p1, p2} \in \mathfrak{R}$$

$$L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} S_N^{F, 2d} \equiv S_N^{F, 2d} \vee S_N^{F, 2d} = \sum_{p1=-M1}^{M1} \sum_{p2=-M2}^{M2} C_{p1, p2} \exp[j(p1 x + p2 y)].$$

Теорема 1 доведена. В наступній теоремі доведена оцінка похибки апроксимації дійсних функцій двох змінних за допомогою оператора $L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f$

Теорема 2. Хай $R_{M, M} f(x, y) = f(x, y) - L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f$ - похибка апроксимації

функції $f(x, y)$ за допомогою оператора $L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f$; $r_N f(x, y) =$

$= f(x, y) - S_N^{F, 2d} f(x, y)$ - похибка наближення функції $f(x, y)$ сумою Фур'є

$S_N^{F, 2d} f(x, y)$ порядку $N = (N1, N2)$; I -тотожний оператор. Тоді виконується

співвідношення при $N = M$: $R_{M, M} f(x, y) =$

$$= r_M f(x, y) - L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} [r_M f(x, y)] = (I - L_{M, M}^{F, 2d, Sp1}) r_M f(x, y). \quad (17)$$

Доведення. Враховуючи властивісті (12), (13), можна написати

$$L_{M,M}^{F,2d,Sp1} [S_M^{F,2d} f(x,y)] = S_M^{F,2d} f(x,y). \text{ Тому:}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y) \Rightarrow R_{M,M} f(x,y) = S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y) - \\ &- L_{M,M}^{F,2d,Sp1} [S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y)] = S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y) - \\ &- L_{M,M}^{F,2d,Sp1} S_M^{F,2d} f(x,y) - L_{M,M}^{F,2d,Sp1} [r_M f(x,y)] = \\ &= r_M f(x,y) - L_{M,M}^{F,2d,Sp1} r_M f(x,y) = (I - L_{M,M}^{F,2d,Sp1}) r_M f(x,y). \end{aligned}$$

Тобто отримали доведення теореми 2.

Теорема 3. Якщо $\lambda_{M1,M2} = \|L_{M,M}^{F,2d,Sp1}\|_{C(D)}$,

$$\rho_{M1,M2}(f) = \inf_{v \in T_{M1,M2}} \|v - f\|_{L^\infty(D)} \text{ є найкраще наближення функції } f(x,y)$$

тригонометричними поліномами $T_{M1,M2}$, то для оцінка похибки

$$R_{M,M} f(x,y) = f(x,y) - L_{M,M}^{F,2d,Sp1} f(x,y) \text{ виконується співвідношення}$$

$$\|R_{M,M} f\|_{C(D)} \leq (1 + \lambda_{M1,M2}) \rho_{M1,M2}(f), \quad D = (-\pi, \pi)^2 \quad (18)$$

Доведення. Враховуючи (17) отримаємо:

$$\begin{aligned} \|R_{M,M} f\|_{C(D)} &= \|f - L_{M,M}^{F,2d,Sp1} f\|_{C(D)} = \|r_M f - L_{M,M}^{F,2d,Sp1} r_M f\|_{C(D)} = \\ &= \|(I - L_{M,M}^{F,2d,Sp1}) r_M f\|_{C(D)} \leq (I + \|L_{M,M}^{F,2d,Sp1}\|_{C(D)}) \|r_M f\|_{C(D)} = \\ &= (1 + \lambda_{M1,M2}) \|r_M f\|_{C(D)}. \text{ Теорема 3 доведена.} \end{aligned}$$

Теорема 4. Хай $f(x,y) \in W^r(D)$, $r = 1, 2, \dots$. Тоді виконується співвідношення:

$$\|R_{M,M} f\|_{C(D)} \leq O\left((1 + \lambda_{M1,M2}) \frac{\ln \overline{M}}{\overline{M}^r}\right), \quad \overline{M} = \min\{M1, M2\}. \quad (19)$$

Доведення. Зауважимо, що $S_M^{F,2d} f(x,y) = S_{x,M1}^F S_{y,M2}^F f(x,y)$. Тому для похибки наближення $f(x,y)$ сумами Фур'є отримаємо:

$$\begin{aligned} r_M f(x,y) &= f(x,y) - S_M^{F,2d} f(x,y) = (I - S_{x,M1}^F S_{y,M2}^F) f(x,y) = \left[(I - S_{x,M1}^F) + (I - S_{y,M2}^F) - \right. \\ &- \left. (I - S_{x,M1}^F)(I - S_{y,M2}^F) \right] f(x,y) = R_1 f(x,y) + R_2 f(x,y) - (R_1 R_2) f(x,y); \\ \|r_M f\|_{C(D)} &= \|(R_1 + R_2 - R_1 R_2) f\|_{C(D)} \leq \|R_1 f\|_{C(D)} + \|R_2 f\|_{C(D)} + \end{aligned}$$

$$+\|R_1 R_2 f\|_{C(D)} \leq \max_{-\pi \leq y \leq \pi} E_{x, M1}(f; y) + \max_{-\pi \leq x \leq \pi} E_{y, M2}(f; x) + E_{M1, M2}(f), \quad (20)$$

де

$$S_{x, M1}^F f(x, y) = \sum_{k=-M1}^{M1} C1_k f(y) \exp(jkx), \quad S_{y, M2}^F f(x, y) = \sum_{p=-M2}^{M2} C2_p f(x) \exp(jpy),$$

$$C1_k [f(y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \exp(-jkx) dx, \quad C2_p [f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \exp(-jpy) dy,$$

$$E_{x, M1}(f; y) = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x, y) - S_{x, M1}^F f(x, y)|;$$

$$E_{y, M2}(f; x) = \max_{-\pi \leq y \leq \pi} |f(x, y) - S_{y, M2}^F f(x, y)|;$$

$$E_{M1, M2}(f) = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |g_{M2}(x) - S_{x, M1}^F g_{M2}(x)|; \quad g_{M2}(x) = E_{y, M2}(f; x). \quad \text{Звідси,}$$

враховуючи (20) і відому оцінку наближення для функцій $f(x, y) \in W^r$, $r = 1, 2, 3, \dots$ тригонометричними поліномами степеня M , отримаємо

$$\|r_M f\|_{C(D)} = O\left(\frac{\ln M1}{M1^r}\right) + O\left(\frac{\ln M2}{M2^r}\right) + O\left(\frac{\ln M1 \ln M2}{M1^r M2^r}\right) = O\left(\frac{\ln \bar{M}}{\bar{M}^r}\right), \quad M \rightarrow \infty.$$

Врахуємо, що $\rho_{M1, M2}(f) \leq \|r_M f\|_{C(D)}$. Підставляючи це співвідношення у формулу (18) отримаємо доведення теореми 4.

Тестовий приклад. В таблиці наведені результати обчислення оцінки приведеної похибки наближення функції $f(x, y) = (1 - x^2)[\cos(My/\sqrt{2}) + 1] + j(1 + y^2)[\cos(Mx/\sqrt{3}) - 1]$ за допомогою оператора $U_{N, M}^{F, 2d, Sp1} f(x, y) - (\beta_1, \gamma_1)$ та оператора $L_{N, M}^{F, 2d, Sp1} f(x, y) (\beta_2, \gamma_2)$, де

$$\beta_1 = \max_{\substack{-M1 \leq r1 \leq M1 \\ -M2 \leq r2 \leq M2}} |f(x_{r1}, y_{r2}) - U_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{r1}, y_{r2})| / \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} |f(x_{r1}, y_{r2})|$$

$$\gamma_1 = \max_{\substack{-M1 \leq r1 \leq M1 \\ -M2 \leq r2 \leq M2}} |f(x_{r1}, y_{r2}) - L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{r1}, y_{r2})| / \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} |f(x_{r1}, y_{r2})|,$$

$$\beta 2 = \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2}) - U_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{r1}, y_{r2}) \right| / \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} |f(x_{r1}, y_{r2})|$$

$$\gamma 2 = \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2}) - L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{r1}, y_{r2}) \right| / \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} |f(x_{r1}, y_{r2})|$$

для $M=M1=M2$; $R=R1=R2$; $N=N1=N2$, де $N1, N2$ – порядок тригонометричного полінома; $(2M+1)^2$ – кількість значень функції $f(x_{r1}, y_{r2})$, що використовується у формулі (7) та (13); $(2M+1)^2$ – кількість точок (x_{r1}, y_{r2}) , $x_{r1} = 2\pi r1 / (2M+1)$, $r1 = \overline{-M, M}$, $y_{r2} = 2\pi r2 / (2M+1)$, $r2 = \overline{-M, M}$, у яких обчислюються числа $\alpha 1$, $\beta 1$, $\gamma 1$; $(2R+1)^2$ – кількість точок (x_{r1}, y_{r2}) , $x_{r1} = 2\pi r1 / (2R+1)$, $r1 = \overline{-R, R}$, $y_{r2} = 2\pi r2 / (2R+1)$, $r2 = \overline{-R, R}$ у яких обчислюються числа $\beta 2, \gamma 2$;

$$\alpha 1 = \max_{\substack{-M1 \leq r1 \leq M1 \\ -M2 \leq r2 \leq M2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2}) - S_M^{F, 2d} f(x_{r1}, y_{r2}) \right| / \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} |f(x_{r1}, y_{r2})|,$$

$$\alpha 2 = \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2}) - S_M^{F, 2d} f(x_{r1}, y_{r2}) \right| / \max_{\substack{-R1 \leq r1 \leq R1 \\ -R2 \leq r2 \leq R2}} |f(x_{r1}, y_{r2})|,$$

$S_M^{F, 2d} f(x_{r1}, y_{r1})$ – сума двовимірного фінітного перетворення Фур'є,
 $U_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{r1}, y_{r2})$ – оператор, що визначається (7), (8).
 $L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x_{r1}, y_{r2})$ – оператор, що визначається (9), (14). Для M та R наведених в таблиці значення $\alpha 1 = \alpha 2$, $\beta 1 = \beta 2$.

Таблиця.

M	R	$\alpha 1$	$\beta 1$	$\beta 2$	$\gamma 1$	$\gamma 2$
4	12	2,7 E-2	6,2 E-2	6,6 E-2	0	2,0 E-2
6	18	3,2 E-2	6,7 E-2	6,7 E-2	0	2,9 E-2
10	30	2,0 E-2	7,3 E-2	7,3 E-2	2,5 E-15	2,1 E-2
20	60	3,5 E-2	7,5 E-2	8,9 E-2	7,3 E-15	3,5 E-2

Висновки. 1. Запропоновано оператори (7), (8) обчислення двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі кусково-сталіх сплайнів. 2. Запропоновано оператори (9), (14) обчислення двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є з інтерполяційними властивостями. 3. Отримана оцінка (19) похибки апроксимації функції $f(x, y) \in C^r(D)$, $r=1, 2, 3, \dots$ за допомогою оператора $L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f$. 4. З таблиці видно, що $\gamma_1=0$ при $N=M$. Тобто, у даному випадку оператор $L_{M, M}^{F, 2d, Sp1} f(x, y)$ інтерполуює $f(x, y)$. 5. Наведений приклад підтверджує теоретичні твердження авторів. 6. Отримані результати узагальнюють твердження роботи [12].

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження у даному напрямку автори вбачають у застосуванні запропонованих операторів обчислення фінітного дискретно - неперервного перетворення Фур'є з використанням кусково-сталіх сплайнів при вирішенні деяких задач математичного моделювання, у деяких відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінювання двовимірних сигналів у цифровій обробці сигналів, у сучасних інформаційних технологіях і т.і.

Список літератури: 1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.-М.: Мир, 1978. 848с. 2. Марпл-мл.С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения.-М.: Мир, 1990. 684с. 3. БолдЭ.Дж. Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ. -ТИИЭР, 1985, №12, с.184-185. 4. ДаджионД., МерсероР. Цифровая обработка многомерных сигналов.-М.: Мир. 1988. 488с. 5. Применение методов фурье-оптики. Под ред. Г.Старка. Пер. С англ.-М.: Радио и связь. 1988. 535с. 6. УдовиченкоВ.Н. Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье. / Методы и микрозлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, SIAP-89, Рига, 1989, (С.204-206). 7. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals. // Proc. Roy.Soc. Edinburgh.-1928.-49.-р.38-47. 8. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Наближений метод відновлення функцій за допомогою тригонометричних сум, точний на тригонометричних поліномах заданого степеня. / Нелинейные красивые задачи математической физики и их приложения. Киев., 1999. 9. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків.-Основа., 2002. 544с. 10. Каппелини В., Константинович А. Дж., Эмилиани. Цифровые фильтры и их применение.-М.: Энергоатомиздат. 1983.-360с. 11. Жуков А.П. Метод Фурье в вычислительной математике.-М.: Наука. Глав. ред. физико-математ. лит. 1992. 176с. 12. Jiahong Yin, Alvaro R. De Pietro, and Musheng Wei. Reconstruction of Compactly Supported Function from the Discrete Sampling of its Fourier Transform. IEEE Transaction on Signal Processing, vol.47, №12, December 1999.

Поступила в редколлегію 11. 04. 03