ственное увеличение изгибной и контактной жесткости зуба с уменьшением коэффициента Пуассона в области его отрицательных значений, в особенности, при ν<–0,4.

Список литературы: **1.** *Плескачевский Ю.М., Шилько С.В.* Ауксетики: модели и приложения // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2003. – №4.– С.26-36. **2.** *Старжинский В.Е., Шалобаев Е.В., Шилько С.В. и др.* Элементы привода приборов. Расчет, конструирование, технологии / *Под общ. ред. Ю.М. Плескачевского.* – Минск: Беларуская навука, 2012. – 784с. **3.** *Шилько С.В., Старжинский В.Е., Петроковец Е.М., Черноус Д.А.* Двухуровневый метод расчета на прочность и деформативность зубчатых колес из дисперсно-армированных композитов// Вісник Національного Технічного університету "ХПІ": Збірник наукових праць. Серія "Проблеми механічного приводу". – Харків: НТУ "ХПІ", 2012. – №35. – С.173-178. **4**. *Андожский В.Д.* Упругие деформации зубьев цилиндрических колес // В кн.: Зубчатые зацепления / *Под ред. Х.Ф. Кетова.* – М.-Л.: Машгиз, 1947. – С.149-215. **5**. *Шандалов К.С.* Влияние податливости зубьев на коэффициент перекрытия передачи // В кн.: Зубчатые и червячные передачи / *Под ред. Н.И. Колчина.* – Л.: Машиностроение, 1968. – С.90-101. **6**. *Muller R.* Maschinenteile aus Kunststoff. – Ausbau, 1972. – №8. – S.491-501.

Поступила в редколлегию 08.04.2013

УДК 539.3: 621.897

Анализ влияния коэффициента пуассона материала на деформативность зубчатых колес / С.В. Шилько, В.Е. Старжинский, Е.М. Петроковец // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №41(1014). – С.177-181. – Бібліогр.: 6 назв.

З використанням скінченноелементної апроксимації аналізується напружено-деформований стан прямозубого циліндричного зубчастого колеса з низькомодульного композиційного матеріалу в різних фазах зачеплення з металевою шестернею. Зокрема, зіставлені значення пружних переміщень зуба і коефіцієнта перекриття при контактуванні в полюсної зоні і вершині зуба. Встановлена нелінійна залежність співвідношення згинальної і контактної жорсткості зуба від коефіцієнта Пуассона ν і показано істотне збільшення жорсткості у області негативних значень ν, характерних для ауксетічних матеріалів.

Ключові слова: зубчасті передачі, контактна і згинна жорсткість, коефіцієнт перекриття, полімерні композити, коефіцієнт Пуассона, ауксетікі, метод кінцевих елементів.

Stress-strain state of straight spur gear made of low modular composite in different phases of meshing with metal pinion is analyzed by finite-element approximation. Particularly, values of tooth elastic displacements and contact ratio at contact in the pole zone and tooth top were compared. The nonlinear dependences of a ratio between contact and bending stiffness on Poisson’s ratio ν were established. Significant increase of the stiffness was shown in the area of negative value ν being typical for auxetic materials.

Keywords: gears, contact and bending stiffness, contact ratio, polymeric composites, Poisson’s ratio, auxetics, finite element method.

УДК 621.833

В.П. ШИШОВ, д.т.н., профессор каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, Луганск;
П.Н. ТКАЧ, к.т.н., доцент каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля;
Е.Ю. ЧАЛАЯ, ассистент каф. прикладной математики ВНУ им. В. Даля;
Т.Е. ЖУРАВЛЕВА, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ГЕОМЕТРИИ АРОЧНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ СМЕШАННОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

В статье приведены основные геометро-кинематические критерии для оценки качества арочного зацепления, зубья колес которого образованы несимметричным исходным контуром. Получены дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления по указанным геометро-кинематическим критериям работоспособности для головки и ножки зуба.

Ключевые слова: арочная зубчатая передача, синтез геометрии зуба, критерии работоспособности, смешанное зацепление.

Актуальность задачи. Основой высокой работоспособности, надежности, долговечности и экономичности любого редуктора является высокая надежность и работоспособность входящих в него зубчатых передач. Поэтому, конструирование, изучение и производство передач с качественно новыми конструктивными и технологическими свойствами является актуальной задачей, неразрывно связанной с проблемой многокритериальной оптимизации машиностроительных конструкций [1].

Анализ литературы. Целесообразным и экономически оправданным путем совершенствования технического уровня зубчатых передач, в том числе и с арочной формой зубьев, является синтез по критериям их работоспособности [2]. Рациональный выбор исходного контура позволяет наиболее полно использовать преимущества арочного зацепления.

При исследовании зубчатых зацеплений, в том числе для синтеза геометрии их зубьев, возникает необходимость решения ряда задач, связанных с определением качества зацепления. Эксплуатационные качества должны быть спрогнозированы уже на стадии проектирования. Поэтому необходимы расчетные критерии, связывающие конкретную эксплуатационную характеристику передачи с геометрией контактирующих поверхностей. Такие критерии получены и глубоко исследованы для зубчатых прямозубых и косозубых передач с линейчатым и точечным контактом [3, 4]. Для передач с арочными зубьями с обобщенной геометрией эти критерии исследованы в работах [5, 6]. Разработанные методы синтеза передач основаны на отыскании производящей поверхности и сводятся к решению дифференциальных уравнений, описывающих геометро-кинематические характеристики зубчатого зацепления через параметры производящей поверхности [4-6]. Однако в указанных работах не рассмотрены арочные передачи смешанного зацепления [7], которое не имеет присущих внеполюсным зацеплениям кинематических и технологических ограничений. Благодаря этому такое зацепление характеризуется широкой сферой возможного применения. Для обобщения результатов, полученных в работе [5], будем рассматривать выпуклую и вогнутую стороны зубьев и шестерни и колеса.

Цель статьи. Получить и проанализировать дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления по заданным геометро-кинематическим критериям.

Материалы исследований. Одним из важнейших геометрических параметров является профиль обобщенного исходного контура. Его можно представить в параметрическом виде соответственно для головки и ножки

$$\begin{cases} x_p = f_1(\lambda); \\ y_p = f_2(\lambda); \end{cases} \quad \begin{cases} x_p = \Phi_1(\lambda); \\ y_p = \Phi_2(\lambda). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь f_1, f_2 и Φ_1, Φ_2 произвольные, необходимое число раз дифференцируемые функции для головки и ножки соответственно, λ – параметр.

Уравнения поверхностей зацепления арочных зубьев в неподвижной системе координат имеет вид для головки и ножки соответственно

$$\begin{cases} x = f_1; \\ y = \mp\Omega_{1f}\cos\beta; \\ z = z_0 \mp f_2 \sin\beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \Phi_1; \\ y = \mp\Omega_{1\Phi}\cos\beta; \\ z = z_0 \mp \Phi_2 \sin\beta. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $y_0(\mu)$, $z_0(\mu)$ – произвольные, необходимое число раз дифференцируемые функции, μ – параметр; $\Omega_{1f} = \dfrac{f_1 f_1'}{f_2'}$, $\Omega_{1\Phi} = \dfrac{\Phi_1\Phi_1'}{\Phi_2'}$.

Верхний знак соответствует выпуклой стороне зуба, нижний – вогнутой стороне.

Уравнения зацепления для шестерни $(i=1)$ и колеса $(i=2)$ для головки и ножки соответственно являются дополнительным условием связи основных параметров зацепления

$$\frac{f_2'}{n_f}\left(\pm\Omega_{2f}\cos\beta \pm y_0 \mp R_i\varphi_i\right) = 0; \quad \frac{\Phi_2'}{n_\Phi}\left(\pm\Omega_{2\Phi}\cos\beta \pm y_0 \mp R_i\varphi_i\right) = 0. \tag{3}$$

Для качественной оценки работоспособности передач зацеплением обычно используются следующие геометро-кинематические критерии: скорость скольжения рабочих поверхностей, скорости перемещения точек контакта на зубьях шестерни и колеса, суммарная скорость перемещения точек контакта, коэффициенты удельных скольжений, угол между вектором относительной скорости и направлением линии контакта, приведенная кривизна поверхностей зубьев.

Для поверхностей зубьев, образованных исходным контуром (1), эти критерии с учетом (2) и (3) имеют вид (для головки и ножки соответственно):

– *скорость скольжения рабочих поверхностей*

$$V_{ск} = \left(1+\frac{1}{u}\right) f_1 \sqrt{\left(\frac{f_1'}{f_2'}\right)^2 \cos^2\beta + 1}; \quad V_{ск} = \left(1+\frac{1}{u}\right) \Phi_1 \sqrt{\left(\frac{\Phi_1'}{\Phi_2'}\right)^2 \cos^2\beta + 1}, \tag{4}$$

– *скорости перемещения точек контакта в направлении, перпендикулярном линии мгновенного контакта на зубьях шестерни (i=1) и колеса (i=2)*

$$V_i = \frac{\omega_1 n_f}{\tau_f}\left(R_i \pm \frac{f_1}{f_2'}\Delta_f\right); \quad V_i = \frac{\omega_1 n_\Phi}{\tau_\Phi}\left(R_i \pm \frac{\Phi_1}{\Phi_2'}\Delta_\Phi\right), \tag{5}$$

где имеют место следующие обозначения (для головки и ножки соответственно): $K_{nf} = \dfrac{K}{1 \pm f_2 K}$, $K_{n\Phi} = \dfrac{K}{1 \pm \Phi_2 K}$ – кривизна эквидистантной кривой на головке и ножке; $n_f = \sqrt{\left(f_1'\right)^2 + \left(f_2'\right)^2}$, $n_\Phi = \sqrt{\left(\Phi_1'\right)^2 + \left(\Phi_2'\right)^2}$, кроме того

$$\begin{aligned} \tau_f &= \sqrt{n_f^2 \sin^2\beta\left(1+\Omega_{1f}K_{nf}\right)^2 + \left(\Omega_{2f}'\right)^2 \cos^2\beta}, \\ \tau_\Phi &= \sqrt{n_\Phi^2 \sin^2\beta\left(1+\Omega_{1\Phi}K_{n\Phi}\right)^2 + \left(\Omega_{2\Phi}'\right)^2 \cos^2\beta}. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\Delta_f &= \Omega'_{2f}\cos^2\beta + f'_2\left(1+\Omega_{1f}K_{nf}\right)\sin^2\beta,\\ \Delta_\Phi &= \Omega'_{2\Phi}\cos^2\beta + \Phi'_2\left(1+\Omega_{1\Phi}K_{n\Phi}\right)\sin^2\beta.\end{aligned} \tag{7}$$

– *суммарная скорость перемещения точек контакта в направлении, перпендикулярном линии мгновенного контакта*

$$V_\Sigma = \frac{\omega_1 n_f}{\tau_f}\left[2R_1 \pm \frac{f_1}{f'_2}\Delta_f\left(1-\frac{1}{u}\right)\right], \quad V_\Sigma = \frac{\omega_1 n_\Phi}{\tau_\Phi}\left[2R_1 \pm \frac{\Phi_1}{\Phi'_2}\Delta_\Phi\left(1-\frac{1}{u}\right)\right]. \tag{8}$$

– *коэффициенты удельных скольжений*

$$\eta_{if} = \pm\frac{\left(1+\frac{1}{u}\right)f_1\Delta_f}{R_i f'_2 \pm f_1\Delta_f}, \quad \eta_{i\Phi} = \pm\frac{\left(1+\frac{1}{u}\right)\Phi_1\Delta_\Phi}{R_i\Phi'_2 \pm \Phi_1\Delta_\Phi} \tag{9}$$

– *угол между относительной скоростью и направлением линии контакта*

$$\nu_f = \operatorname{arctg}\frac{n_f\Delta_f}{\Delta_{1f}\sin\beta\cos\beta}, \quad \nu_\Phi = \operatorname{arctg}\frac{n_\Phi\Delta_\Phi}{\Delta_{1\Phi}\sin\beta\cos\beta}, \tag{10}$$

где для головки и ножки соответственно введены следующие обозначения:

$$\Delta_{1f} = f'_2\,\Omega'_{2f} - n_f^2\left(1+\Omega_{1f}K_{nf}\right), \quad \Delta_{1\Phi} = \Phi'_2\,\Omega'_{2\Phi} - n_\Phi^2\left(1+\Omega_{1\Phi}K_{n\Phi}\right). \tag{11}$$

– *приведенная кривизна поверхностей зубьев в направлении, перпендикулярном линии контакта*

$$\begin{aligned}\chi_{np} &= \frac{f'_2\,\tau_f^2}{{n_f}^3}\cdot\frac{\left(R_1+R_2\right)}{\left(R_2-\frac{f_1\Delta_\Phi}{f'_2}\right)\left(R_1+\frac{f_1\Delta_f}{f'_2}\right)},\\ \chi_{np} &= \frac{\Phi'_2\,\tau_\Phi^2}{{n_\Phi}^3}\cdot\frac{\left(R_1+R_2\right)}{\left(R_2-\frac{\Phi_1\Delta_\Phi}{\Phi'_2}\right)\left(R_1+\frac{\Phi_1\Delta_\Phi}{\Phi'_2}\right)}.\end{aligned} \tag{12}$$

При синтезе будем учитывать, что функции $y_0(\mu)$ и $z_0(\mu)$, определяющие продольную форму зубьев, заданы, а неизвестными являются функции $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ для головки и $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ для ножки зуба, приведенные в (1). Тогда рассмотренные выше формулы геометро-кинематических критериев являются дифференциальными уравнениями, которые можно использовать для определения геометрии исходного контура режущего инструмента для нарезания арочных зубьев. Применительно к арочным зубьям такие уравнения получены в работе [8].

Получим дифференциальные уравнения, позволяющие осуществлять синтез геометрии исходного контура инструмента для нарезания арочных зубьев смешанного зацепления по приведенным выше геометро-кинематическим критериям работоспособности (4-12). Полагая, что для головки исходного контура $f_2 = f_2(f_1)$, а также для ножки $\Phi_2 = \Phi_2(\Phi_1)$, имеем:

$$f'_1 = 1; \quad f''_1 = 0; \quad \Phi'_1 = 1; \quad \Phi''_1 = 0. \tag{13}$$

1. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданной относительной скорости.

В качестве исходной зависимости используем формулу (4). Пусть задана скорость скольжения в торцовом сечении z=const. Из уравнения (2) определим значение μ для заданного z. Учитывая условия (13), преобразуем формулу (4) к виду дифференциального уравнения относительно f_2' для головки и Φ_2' для ножки

$$f_2' = \pm \frac{\omega_1\left(1+\frac{1}{u}\right) f_1 \cos\beta}{\sqrt{V_{ск}^2 - \omega_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)^2 f_1^2}}, \quad \Phi_2' = \pm \frac{\omega_1\left(1+\frac{1}{u}\right) \Phi_1 \cos\beta}{\sqrt{V_{ск}^2 - \omega_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)^2 \Phi_1^2}}. \tag{14}$$

Значение $V_{ск}$ нужно задавать так, чтобы выполнялись ограничения для головки и ножки соответственно,

$$V_{ск}^2 - \omega_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)^2 f_1^2 > 0; \quad V_{ск}^2 - \omega_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)^2 \Phi_1^2 > 0.$$

2. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданным скоростям качения.

Для получения требуемых дифференциальных уравнений используем соотношения скоростей движения точки контакта по поверхности нарезаемого колеса (5). Верхний знак берется для шестерни, нижний – для колеса.

Преобразуем формулу (5) к виду дифференциального уравнения, используя формулы (6), (7), а также вводя следующие обозначения: I – для головки, II – для ножки

$$a_{Vi} = \begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\begin{cases} f_1\left(1+\Omega_{1f}K_{nf}\right)\sin^2\beta, \\ \Phi_1\left(1+\Omega_{1\Phi}K_{n\Phi}\right)\sin^2\beta. \end{cases} \quad b_{Vi} = \begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\begin{cases} n_f{}^2\left(1+\Omega_{1f}K_{nf}\right)^2\sin^2\beta, \\ n_\Phi{}^2\left(1+\Omega_{1\Phi}K_{n\Phi}\right)^2\sin^2\beta \end{cases} \quad c_{Vi} = \begin{matrix} I \\ II \end{matrix}\begin{cases} f_1\cos^2\beta / f_2', \\ \Phi_1\cos^2\beta / \Phi_2'. \end{cases}$$

В результате преобразований получим квадратные уравнения относительно Ω'_{2f} и соответственно для $\Omega'_{2\Phi}$:

$$A_{Vi\,I}\left(\Omega'_{2f}\right)^2 + B_{Vi\,I}\,\Omega_{2f} + C_{Vi\,I} = 0; \; A_{Vi\,II}\left(\Omega'_{2\Phi}\right)^2 + B_{Vi\,II}\,\Omega_{2\Phi} + C_{Vi\,II} = 0,$$

коэффициенты которых определяются из соотношений:

$$A_{Vi\,I} = \frac{V_i^2}{\omega_1^2 n_f^2}\cos^2\beta - c_{vi\,I}^2; \quad A_{Vi\,II} = \frac{V_i^2}{\omega_1^2 n_\Phi^2}\cos^2\beta - c_{vi\,II}^2;$$

$$B_{Vi\,I} = \mp 2R_i c_{Vi\,I} - 2c_{Vi\,I}a_{Vi\,I}; \quad B_{Vi\,II} = \mp 2R_i c_{Vi\,II} - 2c_{Vi\,II}a_{Vi\,II};$$

$$C_{Vi\,I} = \frac{V_i^2}{\omega_1^2 n_f^2} b_{Vi\,I} - \left(R_i \pm a_{Vi\,I}\right)^2; \quad C_{Vi\,II} = \frac{V_i^2}{\omega_1^2 n_\Phi^2} b_{Vi\,II} - \left(R_i \pm a_{Vi\,II}\right)^2.$$

Действительные значения Ω'_{2f} и $\Omega'_{2\Phi}$ получаются при условиях $B_{Vi\,I}^2 - 4A_{Vi\,I}C_{Vi\,I} \ge 0$ и $B_{Vi\,II}^2 - 4A_{Vi\,II}C_{Vi\,II} \ge 0$ для головки (индекс I) и ножки зуба (индекс II) соответственно,

$$\Omega'_{2f}=\frac{-B_{ViI}\pm\sqrt{B_{ViI}^2-4A_{ViI}C_{ViI}}}{2A_{ViI}};\quad \Omega'_{2\Phi}=\frac{-B_{ViII}\pm\sqrt{B_{ViII}^2-4A_{ViII}C_{ViII}}}{2A_{ViII}}. \quad (15)$$

Учитывая, что $\Omega'_{2f}=\left(\Omega_{1f}+f_2\right)'$, а $\Omega'_{2\Phi}=\left(\Omega_{1\Phi}+\Phi_2\right)'$, получим:

$$\Omega'_{2f}=\frac{\left(f_1'^2+f_1f_1''\right)f_2'-f_1f_1'f_2''}{f_1'^2}+f_2',\quad \Omega'_{2\Phi}=\frac{\left(\Phi_1'^2+\Phi_1\Phi_1''\right)\Phi_2'-\Phi_1\Phi_1'\Phi_2''}{\Phi_1'^2}+\Phi_2'. \quad (16)$$

Выражая из равенств (16) вторую производную f_2'' или Φ_2'', с учетом (15), имеем для головки и ножки соответственно:

$$f_2''=\frac{f_2'^2}{f_1f_1'}\left[\frac{f_1'^2+f_1f_1''}{f_2'}+f_2'-\left(\frac{-B_{ViI}\pm\sqrt{B_{ViI}^2-4A_{ViI}C_{ViI}}}{2A_{ViI}}\right)\right],$$

$$\Phi_2''=\frac{\Phi_2'^2}{\Phi_1\Phi_1'}\left[\frac{\Phi_1'^2+\Phi_1\Phi_1''}{\Phi_2'}+\Phi_2'-\left(\frac{-B_{ViII}\pm\sqrt{B_{ViII}^2-4A_{ViII}C_{ViII}}}{2A_{ViII}}\right)\right]. \quad (17)$$

Если считать, что f_1 – аргумент, а $f_2=f_2\left(f_1\right)$, то принимая во внимание условия (13), полученные зависимости упростятся к виду:

$$\Omega'_{2f}=\frac{f_2'-f_1f_2''}{f_1'^2}+f_2';\quad \Omega'_{2\Phi}=\frac{\Phi_2'-\Phi_1\Phi_2''}{\Phi_1'^2}+\Phi_2', \quad (18)$$

$$f_2''=\frac{f_2'^2}{f_1}\left[2f_2'-\left(\frac{-B_{ViI}\pm\sqrt{B_{ViI}^2-4A_{ViI}C_{ViI}}}{2A_{Vi}}\right)\right],$$

$$\Phi_2''=\frac{\Phi_2'^2}{\Phi_1}\left[2\Phi_2'-\left(\frac{-B_{ViII}\pm\sqrt{B_{ViII}^2-4A_{ViII}C_{ViII}}}{2A_{ViII}}\right)\right]. \quad (19)$$

3. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданной суммарной скорости качения.

В качестве исходного используем соотношение (8). Учитывая формулы (6), (7), введенные выше обозначения, преобразуем формулы (8) к виду дифференциальных уравнений относительно Ω'_{2f} для головки и $\Omega'_{2\Phi}$ – для ножки зуба. При этом вводятся новые обозначения:

$$a_{V\Sigma I}=f_1\left(1+\Omega_{1f}K_{nf}\right)\sin^2\beta\left(1-\frac{1}{u}\right);\quad a_{V\Sigma II}=\Phi_1\left(1+\Omega_{1\Phi}K_{n\Phi}\right)\sin^2\beta\left(1-\frac{1}{u}\right);$$

$$c_{V\Sigma I}=\frac{f_1}{f_2'}\cos^2\beta\left(1-\frac{1}{u}\right);\quad c_{V\Sigma II}=\frac{\Phi_1}{\Phi_2'}\cos^2\beta\left(1-\frac{1}{u}\right).$$

Имеем квадратные уравнения для головки (индекс I) и ножки (индекс II):

$$A_{V\Sigma I}\left(\Omega'_{2f}\right)^2+B_{V\Sigma I}\,\Omega_{2f}+C_{V\Sigma I}=0;\; A_{V\Sigma II}\left(\Omega'_{2\Phi}\right)^2+B_{V\Sigma II}\,\Omega_{2\Phi}+C_{V\Sigma II}=0,$$

коэффициенты которых определяются из соответствующих соотношений:

$$A_{V\Sigma I}=\frac{V_\Sigma^2}{\omega_1^2 n_f^{\,2}}\cos^2\beta-c_{\nu\Sigma I}^2;\;\; A_{V\Sigma II}=\frac{V_\Sigma^2}{\omega_1^2 n_\Phi^{\,2}}\cos^2\beta-c_{\nu\Sigma II}^2;$$

$$B_{V\Sigma I}=\mp4R_1c_{V\Sigma I}-2c_{V\Sigma I}a_{V\Sigma I};\;\; B_{V\Sigma II}=\mp4R_1c_{V\Sigma II}-2c_{V\Sigma II}a_{V\Sigma II};$$

$$C_{V\Sigma I}=\frac{V_\Sigma^2}{\omega_1^2 n_f^{\,2}}b_{ViI}-\left(2R_1\pm a_{V\Sigma I}\right)^2;\;\; C_{V\Sigma II}=\frac{V_\Sigma^2}{\omega_1^2 n_\Phi^{\,2}}b_{ViII}-\left(2R_1\pm a_{V\Sigma II}\right)^2.$$

Рассуждая аналогично, получим действительные значения Ω'_{2f} и $\Omega'_{2\Phi}$:

$$\Omega'_{2f}=\frac{-B_{V\Sigma I}\pm\sqrt{B_{V\Sigma I}^2-4A_{V\Sigma I}C_{V\Sigma I}}}{2A_{V\Sigma I}};\;\; \Omega'_{2\Phi}=\frac{-B_{V\Sigma II}\pm\sqrt{B_{V\Sigma II}^2-4A_{V\Sigma II}C_{V\Sigma II}}}{2A_{V\Sigma II}}$$

и уравнения, аналогичные (17), (18) и (19).

4. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданной приведенной кривизне.

За основу возьмем формулы (12), преобразуя которые к виду дифференциальных уравнений, получим квадратные уравнения относительно Ω'_{2f} и $\Omega'_{2\Phi}$ соответственно для головки (индекс I) и ножки (индекс II):

$$A_{\chi I}\left(\Omega'_{2f}\right)^2+B_{\chi I}\,\Omega_{2f}+C_{\chi I}=0;\; A_{\chi II}\left(\Omega'_{2\Phi}\right)^2+B_{\chi II}\,\Omega_{2\Phi}+C_{\chi II}=0,$$

коэффициенты которых определяются из соотношений:

$$A_{\chi I}=f_2'\left(R_1+R_2\right)\cos^2\beta+c_{V1}c_{V2}\chi_{np}\,n_f^3;\;\; A_{\chi II}=\Phi_2'\left(R_1+R_2\right)\cos^2\beta+c_{V1}c_{V2}\chi_{np}\,n_\Phi^3;$$

$$B_{\chi I}=\left(c_{V2}\left(R_1+a_{V1}\right)-c_{V1}\left(R_2-a_{V2}\right)\right)\chi_{np}\,n_f^3;\;\; B_{\chi II}=\left(c_{V2}\left(R_1+a_{V1}\right)-c_{V1}\left(R_2-a_{V2}\right)\right)\chi_{np}\,n_\Phi^3;$$

$$C_{\chi I}=\left(R_1+R_2\right)f_2'b_{ViI}-\chi_{np}\,n_f^3\left(R_1+a_{V1}\right)\left(R_2-a_{V2}\right);$$

$$C_{\chi II}=\left(R_1+R_2\right)\Phi_2'b_{ViII}-\chi_{np}\,n_\Phi^3\left(R_1+a_{V1}\right)\left(R_2-a_{V2}\right).$$

Обозначения $a_{V1},a_{V2},c_{V1},c_{V2}$ получаются из аналогичных, рассмотренных выше коэффициентов при $i=1$ и $i=2$.

Действительные значения Ω'_{2f} и $\Omega'_{2\Phi}$ получаются по формулам, аналогичным формулам (15). Вторые производные f_2'' и Φ_2'' находятся аналогично (17) и (19).

5. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданным коэффициентам удельных скольжений.

Исходными являются равенства (9), преобразуя которые к виду дифференциальных уравнений относительно Ω'_{2f} или $\Omega'_{2\Phi}$, получим для головки (индекс I) и ножки (индекс II) соответственно:

$$\Omega'_{2f}=\frac{C_{\eta I}}{B_{\eta I}};\;\; \Omega'_{2\Phi}=\frac{C_{\eta II}}{B_{\eta II}}.$$

Коэффициенты этих равенств определяются из соотношений:

$$C_{\eta I} = R_i f_2{}' \eta_i \pm f_1 f_2{}' \left(1+\Omega_{1f} K_{nf}\right) \sin^2 \beta \left(\eta_i - \left[1+\frac{1}{u}\right]\right);$$

$$C_{\eta II} = R_i \Phi_2{}' \eta_i \pm \Phi_1 \Phi_2{}' \left(1+\Omega_{1\Phi} K_{n\Phi}\right) \sin^2 \beta \left(\eta_i - \left[1+\frac{1}{u}\right]\right);$$

$$B_{\eta I} = \mp f_1 \cos^2 \beta \left(\eta_i - \left[1+\frac{1}{u}\right]\right); \quad B_{\eta II} = \mp \Phi_1 \cos^2 \beta \left(\eta_i - \left[1+\frac{1}{u}\right]\right).$$

Верхний знак и $i=1$ берется для шестерни, нижний знак и $i=2$ – для колеса. С учетом равенств (21) получим (для головки и ножки соответственно):

$$f_2{}'' = \frac{f_2'^2}{f_1 f_1'} \left[\frac{f_1'^2 + f_1 f_1''}{f_2'} + f_2{}' - \frac{C_\eta}{B_\eta} \right],$$
$$\Phi_2{}'' = \frac{\Phi_2'^2}{\Phi_1 \Phi_1'} \left[\frac{\Phi_1'^2 + \Phi_1 \Phi_1''}{\Phi_2'} + \Phi_2{}' - \frac{C_\eta}{B_\eta} \right]. \quad (20)$$

При синтезе передач необходимо задать коэффициент удельного скольжения зубьев шестерни или колеса и линию на поверхности зацепления, вдоль которой задается η_i. Это могут быть линии $z=$const, $\lambda=$const, $\mu=$const, $\varphi=$const и др. Уравнения этих линий будут служить уравнениями связи между параметрами λ и μ, а решение дифференциальных уравнений (20) позволит определить образующую поверхность, обеспечивающую заданный коэффициент удельного скольжения для шестерни или колеса.

6. *Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубьев по заданному углу между вектором скорости скольжения и мгновенной контактной линией.*

От величины этого угла зависит значение проекции скорости скольжения на нормаль к мгновенной контактной линии: $V = V_{ск} \sin \nu$, которое влияет на комплексные критерии работоспособности передач с арочными зубьями. Скорость скольжения при реальных значениях параметров исходного контура изменяется в узких пределах (4) при $f_2{}' \neq 0$ и $\Phi_2{}' \neq 0$. Целесообразно синтез проводить не по заданной проекции скорости скольжения на нормаль к мгновенной контактной линии, а по заданному углу ν между вектором скорости скольжения и контактной линией. Дифференциальное уравнение для такого синтеза получим с использованием зависимости (10). Учитывая формулы (7), (11), преобразуем исходные соотношения (10) к виду дифференциальных уравнений:

$$\Omega'_{2f} = \frac{C_{\nu I}}{B_{\nu I}}; \quad \Omega'_{2f} = \frac{C_{\nu II}}{B_{\nu II}},$$

коэффициенты которых определяются следующим образом:

$$C_{\nu I} = n_f \; f_2{}' \left(1+\Omega_{1f} K_{nf}\right) \sin^2 \beta + n_f{}^2 \left(1+\Omega_{1f} K_{nf}\right) \mathrm{tg}\nu \sin\beta \cos\beta;$$

$$C_{\nu II} = n_\Phi \Phi_2' \left(1+\Omega_{1\Phi} K_{n\Phi}\right)\sin^2\beta + n_\Phi{}^2 \left(1+\Omega_{1\Phi} K_{n\Phi}\right)\mathrm{tg}\nu \sin\beta\cos\beta ;$$

$$B_{\nu I} = f_2' \mathrm{tg}\nu \sin\beta\cos\beta - n_f \cos^2\beta ;\; B_{\nu II} = \Phi_2' \mathrm{tg}\nu \sin\beta\cos\beta - n_\Phi \cos^2\beta .$$

Используя равенства (16) и (17), получим вторые производные f_2'' и Φ_2'' для головки и ножки соответственно:

$$f_2'' = \frac{f_2'^2}{f_1 f_1'}\left[\frac{f_1'^2 + f_1 f_1''}{f_2'} + f_2' - \frac{C_\nu}{B_\nu}\right], \quad \Phi_2'' = \frac{\Phi_2'^2}{\Phi_1 \Phi_1'}\left[\frac{\Phi_1'^2 + \Phi_1 \Phi_1''}{\Phi_2'} + \Phi_2' - \frac{C_\nu}{B_\nu}\right]. \quad (21)$$

Выводы:

1. В статье приведены зависимости для определения геометро-кинематических критериев оценки качества арочного зацепления, зубья которого образованы несимметричным исходным контуром.

2. На основе этих зависимостей получены дифференциальные уравнения, связывающие параметры головки и ножки исходного контура с геометро-кинематическими критериями работоспособности.

3. Полученные дифференциальные уравнения позволяют синтезировать геометрию исходного контура инструмента для образования зубьев арочных передач смешанного зацепления.

Список литературы: **1.** *Кіндрацький Б., Сулим Г.* Сучасний стан і проблеми богатокритеріального синтезу машинобудівних конструкцій (огляд) // Машинознавство. – Львів, 2002. – №10(64). – С.26-40. **2.** *Шишов В.П., Носко П.Л., Філь П.В.* Теоретичні основи синтезу передач зачепленням: Монографія. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В.Даля, 2006. – 408с. **3.** *Гавриленко В.А.* Геометрическая теория эвольвентных зубчатых передач. – М.: Машгиз, 1949. – 399с. **4.** *Грибанов В.М., Грибанова Ю.В.* Математические модели производства зубчатых цилиндрических передач Новикова. – Луганск: Изд-во ВНУ им. В.Даля, 1999. – 148с. **5.** *Шишов В.П., Носко П.Л., Ревякіна О.А.* Циліндричні передачі з арковими зубцями (теорія, аналіз, синтез): Монографія. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В.Даля, 2004. – 336с. **6.** *Шишов В.П., Носко П.Л., Ткач П.М., Філь П.В.* Високонавантажені циліндричні передачі з двоопукло-ввігнутими зубцями: Монографія. – Луганськ: СНУ ім. В.Даля, 2005. – 216с. **7.** *Журавлев Г.А.* О развитии формы профиля зубьев зубчатых колес // Труды VI Международного симпозиума "Теория реальных передач зацеплением". – Курган, 1997. – С.53-57. **8.** *Шишов В.П., Ткач П.Н., Ревякина О.А.* Дифференциальные уравнения для синтеза цилиндрических зубчатых передач с корсетными зубьями // Вестник Харьковского госуд. политехн. университета. Сборник научных работ. – Вып.109. – Харьков, 2000. – С.82-87.

Поступила в редколлегию 12.04.2013

УДК 621.833

Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления / В.П. Шишов, П.Н. Ткач, Е.Ю. Чалая, Т.Е. Журавлева // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ". – 2013. – №41(1014). – С.181-189. – Бібліогр.: 8 назв.

У статті приведені основні геометро-кінематичні критерії для оцінки якості аркового зачеплення, зубці коліс якого утворені несиметричним початковим контуром. Отримані диференціальні рівняння для синтезу геометрії аркових зубчастих передач змішаного зачеплення за вказаними геометро-кінематичними критеріями працездатності для голівки і ніжки зуба.

Ключові слова: аркова зубчаста передача, синтез геометрії зубця, критерії працездатності, змішане зачеплення.

The article presents main geometry and kinematical criteria for assessing the quality of the arch meshing, which are formed by asymmetric basic rack. Differential equations for the synthesis of geometry arched gear mixed engagement on these geometry and kinematical performance criteria for the top and root of the tooth.

Keywords: arch tooth gearing, synthesis of tooth geometry, performance criteria, mixed gearing.