

УДК 621.833

**С.В. ШЕВЧЕНКО**, к.т.н., доц. каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля,  
**В.П. ШИШОВ**, д.т.н., проф. каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля,  
**Е.А. МАЗНЕВ**, к.т.н., доц. каф. ЛПП ВНУ им. В. Даля,  
**П.Н. ТКАЧ**, к.т.н., доц. каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, Луганск

### СИНТЕЗ ЧЕРВЯЧНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ КОНТАКТА

*Викладено результати дослідження, присвяченого синтезу черв'ячної пари із точковим контактом в експлуатаційному зачепленні.*

*Приведены результаты исследований, посвященных синтезу червячной пары с точечным контактом в эксплуатационном зацеплении.*

*Results of the research devoted to synthesis of worm pair with dot contact in an operation linkage are explained.*

**Постановка проблемы.** Пространственные передачи зацеплением и в их числе червячные на протяжении последних десятилетий неизменно входят в состав механических приводов большинства машин различного назначения, во многом определяя их качественные показатели. Поэтому задача повышения нагрузочной способности и долговечности таких передач является актуальной и может быть отнесена к проблеме многокритериальной оптимизации машиностроительных конструкций [1].

**Анализ литературы.** Одним из эффективных способов повышения работоспособности является локализация контакта. Переход от линейчатого контакта к локализованному является актуальной задачей, так как это позволяет снизить чувствительность червячных передач к погрешностям изготовления и деформациям. В конечном итоге, передачи с точечным контактом рабочих поверхностей имеют преимущества по нагрузочной способности и КПД.

Локализованный контакт в червячном зацеплении может быть достигнут двумя способами:

– созданием линии контакта, форма и (или) длина которой отличается от традиционной линии контакта;

– заменой линейчатого контакта на точечный, который в результате упругих деформаций соприкасающихся поверхностей принимает форму площадки, близкой к эллиптической.

Номинальный точечный контакт сопряженных поверхностей червячной пары можно обеспечить различными способами. Один из них, технологически очень простой, был предложен в [2]. Особенность его заключается в том, что реализация точечного контакта не требует новых исходных контуров червяка и фрезы, а также изменений в существующей технологии изготовления червячной пары. В станочном зацеплении здесь взаимодействуют архимедова фреза ( $ZA$ ) и нарезанные ею зубья колеса ( $GA$ ), а в эксплуатационном зацеплении с этими зубьями входят в контакт витки эвольвентного червяка ( $ZJ$ ). Так как  $ZJ$ , будучи «вложенным» в  $ZA$ , соприкасается с последним по винтовой линии, то в зацеплении [ $ZJ + GA$ ] контакт между ними будет не по линии, а в точках. Анализ такого контактирования в первом приближении рассмотрен в работе [3].

Как уже было отмечено, точечный контакт поверхностей, рассматриваемый в физическом смысле, то есть с учетом упругих свойств витков и зубьев, представляет собой эллиптическую площадку. Управлять размерами этого эллипса в передачах [2, 3] не представляется возможным.

**Цель статьи.** Синтезировать профиль червяка, витки которого имели бы геометрически точечный контакт с зубьями колеса  $GA$  при заданной степени локализации физического контакта.

**1. Исходные данные.** Исходной величиной для решения этой задачи был принят коэффициент эллиптичности  $K_{\varepsilon}$  физического контакта синтезируемого червяка  $ZF$  и зубьев колеса  $GA$ :  $K_{\varepsilon} = a/b$ , где  $a$ ,  $b$  – большая и малая полуоси эллипса соответственно.

После подстановки выражений для  $a$  и  $b$  [4] получим зависимость для  $K_{\text{э}}$  в развернутом виде:

$$K_{\text{э}} = \sqrt{\frac{\chi_I + \chi_{II} - k_{2I} - k_{2II} + \sqrt{(\chi_I - \chi_{II})^2 + (k_{2I} - k_{2II})^2 - 2(\chi_I - \chi_{II})(k_{2I} - k_{2II})\cos 2\sigma}}{\chi_I + \chi_{II} - k_{2I} - k_{2II} - \sqrt{(\chi_I - \chi_{II})^2 + (k_{2I} - k_{2II})^2 - 2(\chi_I - \chi_{II})(k_{2I} - k_{2II})\cos 2\sigma}}}$$

Здесь  $\chi_I$  и  $\chi_{II}$  – первая ( $\chi_I$ ) и вторая ( $\chi_{II}$ ) главные кривизны синтезируемой поверхности витков червяка  $ZF$  в точке контакта с зубьями колеса  $GA$ ;  $k_{2I}$  и  $k_{2II}$  – первая ( $k_{2I}$ ) и вторая ( $k_{2II}$ ) главные кривизны поверхности  $GA$  в точке контакта с поверхностью  $ZF$ ;  $\sigma$  – угол между главными направлениями  $ZF$  и  $GA$  с кривизнами  $\chi_I$  и  $k_{2I}$  соответственно.

**2. Определение главных кривизн  $\chi_I$  и  $\chi_{II}$ .** Витки червяка  $ZF$  являются геликоидом, уравнение которого в параметрической форме имеет вид:

$$X = f_1 \cdot \cos v; \quad Y = f_1 \cdot \sin v; \quad Z = P \cdot v + f_3(f_1); \quad (1)$$

где  $f_1, v$  – независимые переменные;  $f_3 = f_3(f_1)$  – искомая функция осевого профиля витков  $ZF$ .

Главные кривизны поверхности (1) находятся с использованием коэффициентов 1-й и 2-й квадратичных форм [5]:

$$\chi_{I,II} = \frac{-t_2 \pm \sqrt{t_2^2 - 4t_1 \cdot t_3}}{2t_1},$$

где  $t_1 = E \cdot G - F^2$ ;  $t_2 = ED'' + G \cdot D - 2F \cdot D'$ ;  $t_3 = D \cdot D'' - (D')^2$ .

Коэффициенты 1-й квадратичной формы поверхности  $ZF$ :  $E = 1 + \dot{f}_3^2$ ;  $F = P \cdot \dot{f}_3$ ;  $G = f_1^2 + P^2$ ;  $h = \sqrt{P^2 + (1 + \dot{f}_3^2) \cdot f_1^2}$ . Коэффициенты 2-й квадратичной формы поверхности  $ZF$ :  $D = \frac{f_1 \cdot \ddot{f}_3}{h}$ ;  $D' = \frac{-P}{h}$ ;  $D'' = \frac{f_1^2 \cdot \dot{f}_3}{h}$ . Принятые здесь обозначения:  $\dot{f}_3 = df_3/df_1$ ;  $\ddot{f}_3 = d^2 f_3/df_1^2$ ;  $P = r_1 \cdot \text{tg } \gamma$  – параметр червяка  $ZF$ ; ( $r_1$  и  $\gamma$  – делительный радиус и делительный угол подъема витков  $ZF$ ).

**3. Определение главных кривизн  $k_{2I}$  и  $k_{2II}$ .** В станочном зацеплении  $[ZA+GA]$  фреза  $ZA$  является огибаемой поверхностью, а зубья колеса  $GA$  – огибающими поверхностями. Поэтому параметры более сложных в математическом описании поверхностей  $GA$  выразим через более простую поверхность  $ZA$ , уравнение которой зададим в параметрическом виде:

$$X_1 = u \cdot \cos \alpha_u \cdot \cos v; \quad Y_1 = u \cdot \cos \alpha_u \cdot \sin v; \quad Z_1 = P \cdot v - u \cdot \sin \alpha_u;$$

где  $u, v$  – независимые переменные;  $\alpha_u$  – угол осевого профиля червяка  $ZA$

на делительном цилиндре (константа).

Главные кривизны  $k_{2I,II}$  на зубьях колеса  $GA$  определяются известной формулой Б.О. Родрига [4]:

$$k_{2I,II} = -\frac{\dot{e}_{r2}}{V_{r2}},$$

где  $\dot{e}_{r2}$  – скорость конца орта нормали для точки контакта на зубе  $GA$ ;  $V_{r2}$  – скорость точки контакта на поверхности зуба  $GA$ ; индексы  $I$  и  $II$  обозначают главные направления на  $GA$ .

Используя кинематический метод, связывающий  $\dot{e}_{r2}$  и  $V_{r2}$  с  $\dot{e}_{r1}$  и  $V_{r1}$ , получим развернутые зависимости для  $\dot{e}_{r2}$  и  $V_{r2}$ :

$$\dot{e}_{r2} = \left[ \left( \dot{e}_{xu} \cdot \frac{du}{dt} + \dot{e}_{xv} \cdot \frac{dv}{dt} - w_2 \cdot e_{1z} - w_1 \cdot e_{1y} \right)^2 + \left( \dot{e}_{yu} \cdot \frac{du}{dt} + \dot{e}_{yv} \cdot \frac{dv}{dt} + w_1 \cdot e_{1x} \right)^2 + \left( \dot{e}_{zu} \cdot \frac{du}{dt} + \dot{e}_{zv} \cdot \frac{dv}{dt} - w_2 \cdot e_{1z} - w_1 \cdot e_{1y} \right)^2 \right]^{0,5}; \quad (2)$$

$$V_{r2} = \left\{ \left( \dot{X}_{1u} \cdot \frac{du}{dt} + \dot{X}_{1v} \cdot \frac{dv}{dt} - Y_1 - Z_1 \cdot \frac{\cos \phi_1}{U_{12}} \right)^2 + \left( \dot{Y}_{1u} \cdot \frac{du}{dt} + \dot{Y}_{1v} \cdot \frac{dv}{dt} + X_1 + Z_1 \cdot \frac{\sin \phi_1}{U_{12}} \right)^2 + \left[ \dot{Z}_{1u} \cdot \frac{du}{dt} + \dot{Z}_{1v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{(X_1 \cdot \cos \phi_1 - Y_1 \cdot \sin \phi_1 + a_w)}{U_{12}} \right]^2 \right\}^{0,5}. \quad (3)$$

Параметры  $a_w, U_{12}, w_1$  являются константами и берутся из обычного инженерного расчета червячной передачи. Угол поворота  $\phi_1$  червяка  $ZF$  является переменной величиной и задается с требуемым шагом в пределах полного оборота  $ZF$ .

Частные производные координат  $ZF$  и орта нормали к ней определяются выражениями:

$$\begin{cases} \dot{X}_{1u} = \frac{\partial X_1}{\partial u} = \cos \alpha_u \cdot \cos v; & \dot{X}_{1v} = \frac{\partial X_1}{\partial v} = -u \cdot \cos \alpha_u \cdot \sin v; \\ \dot{Y}_{1u} = \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \cos \alpha_u \cdot \sin v; & \dot{Y}_{1v} = \frac{\partial Y_1}{\partial v} = u \cdot \cos \alpha_u \cdot \cos v; \\ \dot{Z}_{1u} = \frac{\partial Z_1}{\partial u} = -\sin \alpha_u; & \dot{Z}_{1v} = \frac{\partial Z_1}{\partial v} = P. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_{xu} = \frac{\partial e_x}{\partial u} = \frac{\dot{n}_{xu} \cdot n - n_x \cdot \dot{n}_u}{n^2}; & \dot{e}_{xv} = \frac{\partial e_x}{\partial v} = \frac{\dot{n}_{xv}}{n}; \\ \dot{e}_{yu} = \frac{\partial e_y}{\partial u} = \frac{\dot{n}_{yu} \cdot n - n_y \cdot \dot{n}_u}{n^2}; & \dot{e}_{yv} = \frac{\partial e_y}{\partial v} = \frac{\dot{n}_{yv}}{n}; \\ \dot{e}_{zu} = \frac{\partial e_z}{\partial u} = \frac{\dot{n}_{zu} \cdot n - n_z \cdot \dot{n}_u}{n^2}; & \dot{e}_{zv} = \frac{\partial e_z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$n = \sqrt{P^2 + u^2} \cdot \cos \alpha_u; \quad \dot{n}_u = u \cdot \cos \alpha_u / \sqrt{P^2 + u^2};$$

$$\begin{cases} \dot{n}_{xu} = (\sin \alpha_u \cdot \cos v + P \cdot \sin v) \cdot \cos \alpha_u; \\ \dot{n}_{yu} = (\sin \alpha_u \cdot \sin v - P \cdot \cos v) \cdot \cos \alpha_u; \\ \dot{n}_{zu} = \cos^2 \alpha_u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{n}_{xv} = (P \cdot \cos v - u \cdot \sin \alpha_u \cdot \sin v) \cdot \cos \alpha_u; \\ \dot{n}_{yv} = (P \cdot \sin v + u \cdot \sin \alpha_u \cdot \cos v) \cdot \cos \alpha_u. \end{cases}$$

Производные  $du/dt$  и  $dv/dt$ , входящие в зависимости (2) и (3), определяют главные направления  $I$  и  $II$  на  $ZF$  и находятся из условия коллинеарности векторов  $\vec{e}_{r1}$  и  $\vec{V}_{r1}$  [4]:

$$\frac{\dot{e}_{r1x}}{V_{r1x}} = \frac{\dot{e}_{r1y}}{V_{r1y}} = \frac{\dot{e}_{r1z}}{V_{r1z}}. \quad (4)$$

Из трех равенств, входящих в соотношение (4), используем любые два (третье, как известно, будет являться тождеством). В результате значения  $du/dt$  и  $dv/dt$  – это корни системы двух квадратных уравнений:

$$\begin{cases} (\dot{e}_{xu} \cdot \dot{Z}_{1u} - \dot{e}_{zu} \cdot X_{1u}) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \dot{e}_{xv} \cdot \dot{Z}_{1v} \cdot \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \\ + (\dot{e}_{xu} \cdot \dot{Z}_{1v} + \dot{e}_{xv} \cdot \dot{Z}_{1u} - \dot{e}_{zu} \cdot X_{1u}) \left( \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} \right) = 0; \\ (\dot{e}_{yu} \cdot \dot{Z}_{1u} - \dot{e}_{zu} \cdot \dot{Y}_{1u}) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \dot{e}_{yv} \cdot \dot{Z}_{1v} \cdot \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \\ + (\dot{e}_{yu} \cdot \dot{Z}_{1v} + \dot{e}_{yv} \cdot \dot{Z}_{1u} - \dot{e}_{zu} \cdot \dot{Y}_{1v}) \left( \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} \right) = 0. \end{cases}$$

**4. Определение угла  $\sigma$ .** Искомое значение угла  $\sigma$  находится из урав-

нения [4]  $tg \sigma = \frac{V_{rF(II)} + V_{12F(II)}}{V_{rF(I)} + V_{12F(I)}}$ , которое содержит проекции скорости точки

контакта по поверхности  $ZF$  на ее главные направления –  $V_{rF(I,II)}$ , а также проекции на те же направления скорости относительного движения звеньев передачи  $[ZF+GA] - V_{12F(I,II)}$ .

Для поверхности  $ZF$ , заданной уравнениями (1):

$$V_{rF} = \sqrt{\left( \dot{X}_f \cdot \frac{df_1}{dt} + \dot{X}_v \cdot \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \dot{Y}_f \cdot \frac{df_1}{dt} + \dot{Y}_v \cdot \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \dot{Z}_f \cdot \frac{df_1}{dt} + \dot{Z}_v \cdot \frac{dv}{dt} \right)^2}. \quad (5)$$

Если значения  $df_1/dt$  и  $dv/dt$  определить для  $I$ -го и  $II$ -го главных направлений на  $ZF$ , то найденная по формуле (5) скорость будет давать искомые значения  $V_{rF(I,II)}$ .

Требуемые величины  $df_1/dt$  и  $dv/dt$  находятся, как и для червяка  $ZA$ , из условия коллинеарности векторов  $\vec{e}_{rF}$  и  $\vec{V}_{rF}$ . В результате, опуская преобразования, система двух квадратных уравнений, из которых определяются  $df_1/dt$  и  $dv/dt$ , соответствующие  $I$ -му и  $II$ -му главным направлениям на  $ZF$ , имеет вид:

$$\begin{cases} (\dot{e}_{Fxf} \cdot \dot{f}_3 - \dot{e}_{Fxf} \cdot \cos v) \cdot (df_1/dt)^2 + P \cdot \dot{e}_{Fyv} \cdot (dv/dt)^2 + \\ + (P \cdot \dot{e}_{Fyf} + \dot{e}_{Fyv} \cdot \dot{f}_3 + \dot{e}_{Fxf} \cdot f_1 \cdot \sin v) \cdot [(df_1/dt) \cdot (dv/dt)] = 0; \\ (\dot{e}_{Fyf} \cdot \dot{f}_3 - \dot{e}_{Fyf} \cdot \sin v) \cdot (df_1/dt)^2 + P \cdot \dot{e}_{Fyv} \cdot (dv/dt)^2 + \\ + (P \cdot \dot{e}_{Fyf} + \dot{e}_{Fyv} \cdot \dot{f}_3 - \dot{e}_{Fxf} \cdot f_1 \cdot \cos v) \cdot [(df_1/dt) \cdot (dv/dt)] = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{cases} \dot{e}_{Fxf} = \frac{\dot{n}_{Fxf} \cdot n_F - n_{Fx} \cdot \dot{n}_{Ff}}{n_F^2}; & \dot{e}_{Fyv} = \frac{\dot{n}_{Fyv}}{n_F}; \\ \dot{e}_{Fyf} = \frac{\dot{n}_{Fyf} \cdot n_F - n_{Fy} \cdot \dot{n}_{Ff}}{n_F^2}; & \dot{e}_{Fyv} = \frac{\dot{n}_{Fyv}}{n_F}; \\ \dot{e}_{Fzf} = \frac{n_F - n_{Fz} \cdot \dot{n}_{Ff}}{n_F^2}; & \dot{e}_{Fzv} = 0. \end{cases}$$

Модуль нормали, проекции нормали и их производные определяются следующими соотношениями:

$$n_F = \sqrt{P^2 + f_1^2 \cdot (1 + \dot{f}_3^2)}; \quad \dot{n}_{Ff} = 2f_1 \cdot \frac{\dot{f}_3 \cdot (f_3 + f_1 \cdot \dot{f}_3) + 1}{\sqrt{P^2 + f_1^2 \cdot (1 + \dot{f}_3^2)}}.$$

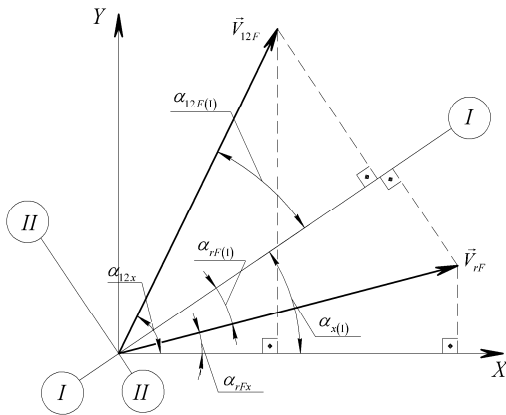


Рис. Схема к расчету модуля относительной скорости движения

Модуль относительной скорости движения звеньев  $[ZF+GA]$  в системе координат  $\{X, Y, Z\}$ :

$$V_{12F} = \frac{1}{U_{12}} \left[ (Y \cdot U_{12}^2 + Z \cdot \cos \phi_1)^2 + (X \cdot U_{12}^2 + Z \cdot \sin \phi_1)^2 + (X \cdot \cos \phi_1 - Y \cdot \sin \phi_1 + a_w)^2 \right]^{0.5}$$

Входящий в  $V_{12F}$  угол поворота червяка  $\phi_1$  выражается через независимые переменные  $[f_1, v]$  червяка  $ZF$ , для чего используется уравнение зацепления пары  $[ZF+GA]$ :  $\vec{n}_F \cdot \vec{V}_{12F} = 0$ , которое в развернутом виде определяется зависимостью:

$$\begin{aligned} & - (P \cdot \sin v - f_1 \dot{f}_3 \cos v) \cdot (Y \cdot u_{12} + Z \cdot \cos \phi_1) - \\ & - (P \cdot \cos v - f_1 \dot{f}_3 \sin v) \cdot (X \cdot u_{12} + Z \cdot \sin \phi_1) + \\ & + f_1 (X \cdot \cos \phi_1 - Y \cdot \sin \phi_1 + a_w) = 0. \end{aligned}$$

Угол  $\alpha_{12F(I)}$  между  $\vec{V}_{12F}$  и  $I$ -м главным направлением на  $ZF$  находится непосредственно из схемы:

$$\alpha_{12F(I)} = \alpha_{12x} - \alpha_{x(I)},$$

где  $\alpha_{12x} = \arccos\left(\frac{V_{12Fx}}{V_{12F}}\right)$ ;  $\alpha_{x(I)} = \alpha_{rF(I)} + \alpha_{rFx}$  (здесь  $V_{12Fx} = Y + \frac{Z \cdot \cos \phi_1}{U_{12}}$ ).

$$\begin{cases} \dot{n}_{Fxf} = -(\dot{f}_3 + f_1 \cdot \ddot{f}_3) \cdot \cos v; \\ \dot{n}_{Fyv} = P \cdot \cos v + f_1 \cdot \dot{f}_3 \cdot \sin v; \\ \dot{n}_{Fyf} = -(\dot{f}_3 + f_1 \cdot \ddot{f}_3) \cdot \sin v; \\ \dot{n}_{Fyv} = P \cdot \sin v - f_1 \cdot \dot{f}_3 \cdot \cos v. \end{cases}$$

Расчеты  $V_{12F(I)}$  иллюстрирует схема рисунка, на которой показана взаимосвязь этого параметра с  $V_{rF}$  и главными направлениями  $I$  и  $II$  на поверхности  $ZF$  в точке контакта.

Из схемы следует, что

$$V_{12F(I)} = V_{12F} \cdot \cos \alpha_{12F(I)}.$$

$$\text{Углы } \alpha_{rF(I)} \text{ и } \alpha_{rFx} - \alpha_{rF(I)} = \arccos\left(\frac{V_{rF(I)}}{V_{rF}}\right); \quad \alpha_{rFx} = \arccos\left(\frac{V_{rFx}}{V_{rF}}\right).$$

Определив  $V_{12F(I)}$  и зная  $V_{12F}$ , легко найти вторую проекцию  $V_{12F}$  – на  $II$ -е главное направление:

$$V_{12F(II)} = \sqrt{V_{12F}^2 - V_{12F(I)}^2}.$$

**Выводы.** 1. Рассмотрена задача синтеза червячного зацепления с локализованным контактом сопряженных поверхностей витков червяка  $ZF$  и зубьев колеса  $GA$ . Зубья колеса образованы в станочном зацеплении с архимедовой фрезой  $ZA$ .

2. Решение поставленной задачи сводится к нахождению осевого профиля  $f_3 = f_3(f_1)$  червяка  $ZF$  по заданному коэффициенту эллиптичности  $K_9$  мгновенной площади контакта червяка  $ZF$  и зубьев колеса  $GA$ , для чего требуется интегрирование дифференциального уравнения второго порядка  $\Phi(f_3, \dot{f}_3, \ddot{f}_3) = 0$ .

3. Найденные значения  $f_3$  для различных углов поворота червяка  $\phi_1$  аппроксимируются некоторой кривой, которая является исходным контуром синтезированного червяка  $ZF$ .

**Список литературы.** 1. Кіндрацький Б., Сулим Г. Сучасний стан і проблеми багатокритеріального синтезу машинобудівних конструкцій (огляд) // Львів, Машинознавство, 2002, №10(64). – с.26 – 40. 2. А.с. № 904410 СССР МКИ F16H 1/16. Червячная передача / С.В. Шевченко, В.П. Шишов, В.И. Подройко. – 2911046/25-28; Заявл. 21.04.1980; Опубл. в бюл. № 15, 1982. 3. Шевченко С.В., Ткач П.Н. Локализация контакта в червячном зацеплении на базе стандартных элементов передачи // Подъемно-транспортная техника. – Днепропетровск, 2010. – № 1. – С. 49-55. 4. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с. 5. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. – М.: Машиностроение, 1968. – 372 с.

Поступила в редколлегию 20.09.11