

**Е. Г. ЯНЮТИН**, д-р. техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;  
**Д. И. БОГДАН**, канд. техн. наук, ХНАДУ, Харьков;  
**Е. Ю. ТОЛБАТОВ**, канд. физ.-мат. наук, НАУ, Киев

## НАЧАЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Анализируются нестационарные колебания упругого полупространства в случае заданного на его поверхности кинематических воздействий. Рассматривается неосесимметричная постановка краевой задачи теории упругости. Решение строится в виде разложения в двойные ряды Фурье по двум пространственным координатам. Представлен численный пример по нахождению начальных перемещений на глубине полупространства при известных перемещениях на поверхности.

**Ключевые слова:** полупространство, кинематическое воздействие, неосесимметричная система, система интегральных уравнений.

**Введение.** Представляется решение прямой задачи теории упругости для нестационарного деформирования упругого полупространства в случае задания на его поверхности кинематических воздействий. Применяется *теория трехмерных уравнений Ляме* в декартовой системе координат. Численный пример определения начальных перемещений на глубине полупространства при заданных на его поверхности кинематических воздействиях иллюстрирует эффективность разработанной методики.

**Постановка задачи.** Рассмотрим деформируемый объект (полупространство), отнесенный к декартовой системе координат.

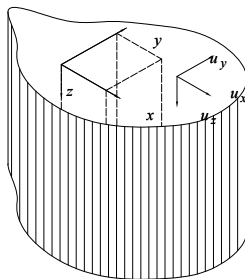


Рис. 1 – Фрагмент упругого полупространства.

Будем в упругом полупространстве условно выделять полубесконечный по координате  $z$  параллелепипед с размерами  $x_0$  и  $y_0$  соответственно вдоль

осей  $x$  и  $y$  (см. рис. 1). Условное введение такого параллелепипеда необходимо для того, чтобы построить решение задачи о начальном этапе кинематического нагружения трехмерного упругого полупространства.

**Порядок решения.** Движение точки упругой изотропной среды в декартовой системе координат при отсутствии объемных сил можно описать с помощью уравнения Ляме в векторной форме [2, 3]:

$$(\lambda + \mu) \cdot \text{grad div } \bar{u} + \mu \cdot \Delta \bar{u} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$\bar{u} = \text{grad } \phi + \text{rot rot}(\bar{e}_z \cdot \psi_1) + \text{rot}(\bar{e}_z \cdot \psi_2), \quad (2)$$

где  $\bar{e}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ ;  $\phi = \phi(x, y, z, t)$ ,  $\psi_1 = \psi_1(x, y, z, t)$ ,  $\psi_2 = \psi_2(x, y, z, t)$ , – скалярные потенциалы, которые должны удовлетворять следующим волновым уравнениям:

$$\Delta \phi - c_1^{-2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \psi_1 - c_2^{-2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \psi_2 - c_2^{-2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения продольных и поперечных волн деформаций в упругой среде.

Значения этих скоростей играют определяющую роль для построения пространственно-временной области, в которой будет справедливо получаемое решение.

Приведем более подробную запись составляющих уравнения (2):

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{e}_z, \quad \text{rot}(\bar{e}_z \cdot \psi_2) = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \psi_2 \end{vmatrix} = \bar{e}_x \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \bar{e}_y \frac{\partial \psi_2}{\partial x},$$

$$\text{rot rot}(\bar{e}_z \cdot \psi_1) = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_x \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial x} + \bar{e}_y \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} + \bar{e}_z \left( -\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right).$$

Подставляя соотношения (4) в уравнение (2), а затем раскладывая вектор перемещения на компоненты, получим:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{e}_z - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Запишем решения скалярных волновых уравнений (3) в виде разложений в двойные ряды Фурье [4]

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{nm}(z, t) u_m(x) v_n(y); \\ \psi_1(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{nm}(z, t) u_m(x) v_n(y); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\psi_2(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{nm}(z, t) \frac{1}{\mu_m} \frac{du_m(x)}{dx} \frac{1}{\lambda_n} \frac{dv_n(y)}{dy},$$

где  $X_{nm}(z, t)$ ,  $Y_{nm}(z, t)$ ,  $Z_{nm}(z, t)$  – неизвестные функции переменных  $z$  и  $t$ .

Для удовлетворения граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad u_x = 0 \quad \text{при } x = 0, x_0; \\ \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad u_y = 0 \quad \text{при } y = 0, y_0, \end{aligned} \quad (7)$$

в формулах (6) можно принять функции  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  в виде

$$u_m(x) = \cos(\mu_m x), \quad v_n(y) = \cos(\lambda_n y) \quad \left( \mu_m = \frac{m\pi}{x_0}, \lambda_n = \frac{n\pi}{y_0} \right). \quad (8)$$

Форма принимаемых функций  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  может быть выбрана и другой [4], лишь бы можно было произвести эффективное разделение переменных в уравнениях (3).

Подставив принятые разложения функций для потенциалов (6) в соотношения (5), получим:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_{nm}(z, t) u'_m(x) v_n(y) + Y'_{nm}(z, t) u'_m(x) v_n(y) + Z_{nm}(z, t) \frac{1}{\mu_m \lambda_n} u'_m(x) v''_n(y) \right); \\ u_y &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X_{nm}(z, t) u_m(x) v'_n(y) + Y'_{nm}(z, t) u_m(x) v'_n(y) - Z_{nm}(z, t) \frac{1}{\mu_m \lambda_n} u''_m(x) v'_n(y) \right); \\ u_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( X'_{nm}(z, t) u_m(x) v_n(y) - Y'_{nm}(z, t) u''_m(x) v_n(y) - \right. \\ &\quad \left. - Y_{nm}(z, t) \frac{1}{\mu_m \lambda_n} u_m(x) v''_n(y) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях (9) штрихом обозначается производная по пространственной переменной соответствующей функции.

В пространстве изображений уравнения (3) после подстановки в них разложения (6) примут вид:

$$\frac{d^2 X_{mn}^L(z,s)}{dz^2} - \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) X_{mn}^L(z,s) = 0; \quad \frac{d^2 Y_{mn}^L(z,s)}{dz^2} - \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) Y_{mn}^L(z,s) = 0;$$

$$\frac{d^2 Z_{mn}^L(z,s)}{dz^2} - \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) Z_{mn}^L(z,s) = 0.$$

Их решение можно записать так:

$$X_{mn}^L(z,s) = A_{mn}^L(s) \frac{e^{-\frac{z}{c_1} \sqrt{a_{nm}^2 + s^2}}}{\sqrt{a_{nm}^2 + s^2}}; \quad Y_{mn}^L(z,s) = B_{mn}^L(s) \frac{e^{-\frac{z}{c_2} \sqrt{b_{nm}^2 + s^2}}}{\sqrt{b_{nm}^2 + s^2}};$$

$$Z_{mn}^L(z,s) = C_{mn}^L(s) \frac{e^{-\frac{z}{c_2} \sqrt{b_{nm}^2 + s^2}}}{\sqrt{b_{nm}^2 + s^2}},$$
(10)

где  $A_{mn}^L(s)$ ,  $B_{mn}^L(s)$ ,  $C_{mn}^L(s)$  – произвольные функции переменной Лапласа  $s$ ;

$$a_{nm}^2 = c_1^2 \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 \right), \quad b_{nm}^2 = c_2^2 \left( \mu_m^2 + \lambda_n^2 \right).$$

Формулы (10) были специально записаны в таком виде, чтобы в дальнейшем получить решение в форме *бегущей волны* по переменным  $z$  и  $t$ .

Следует отметить, что при выполнении *обратного преобразования Лапласа* использовалась следующая взаимосвязь[1,2]:

$$\frac{e^{-\alpha \sqrt{\beta^2 + s^2}}}{\sqrt{\beta^2 + s^2}} \rightarrow H(t - \alpha) J_0 \left( \beta \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right).$$
(11)

Используя формулу (11), можно записать выражения для функций  $X_{mn}(z,s)$ ,  $Y_{mn}(z,s)$ ,  $Z_{mn}(z,s)$  в *пространстве оригиналов*:

$$X_{mn}(z,t) = H \left( t - \frac{z}{c_1} \right) \int_0^{t - \frac{z}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0 \left( a_{mn} \sqrt{(t - \tau)^2 - \left( \frac{z}{c_1} \right)^2} \right) d\tau;$$

$$Y_{mn}(z,t) = H \left( t - \frac{z}{c_2} \right) \int_0^{t - \frac{z}{c_2}} B_{mn}(\tau) J_0 \left( b_{mn} \sqrt{(t - \tau)^2 - \left( \frac{z}{c_2} \right)^2} \right) d\tau;$$

$$Z_{mn}(z,t) = H \left( t - \frac{z}{c_2} \right) \int_0^{t - \frac{z}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0 \left( b_{mn} \sqrt{(t - \tau)^2 - \left( \frac{z}{c_2} \right)^2} \right) d\tau.$$
(12)

Пусть на границе упругого полупространства реализуются граничные условия, отвечающие заданию нестационарных перемещений в форме

$$u_x(x, y, 0, t) = f_1(x, y, t); u_y(x, y, 0, t) = f_2(x, y, t); u_z(x, y, 0, t) = f_3(x, y, t), \quad (13)$$

где  $f_1(x, y, t)$ ,  $f_2(x, y, t)$ ,  $f_3(x, y, t)$  – известные функции.

Если предположить, что на боковых гранях условно выделяемого параллелепипеда бесконечной высоты выполняются граничные условия (7), то выражения для компонент вектора перемещения можно записать в виде следующих двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu_m X_{nm}(z, t) - \mu_m Y'_{nm}(z, t) + \lambda_n Z_{nm}(z, t)) \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y); \\ u_y(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_n X_{nm}(z, t) - \lambda_n Y'_{nm}(z, t) - \mu_m Z_{nm}(z, t)) \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y); \\ u_z(x, y, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (X'_{nm}(z, t) + \mu_m^2 Y_{nm}(z, t) + \lambda_n^2 Y_{nm}(z, t)) \cos(\mu_m x) \cos(\lambda_n y). \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно выражениям (14), следует производить также разложения граничных функций перемещений по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{nm}^1 \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y); f_2(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}^2 \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y); \\ f_3(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{nm}^3 \cos(\mu_m x) \cos(\lambda_n y). \end{aligned}$$

Записывая уравнения (14) при  $z = 0$  и подставляя в них заданные граничные условия (13), получим систему интегральных уравнений для нахождения неизвестных функций  $A_{mn}(\tau)$ ,  $B_{mn}(\tau)$ ,  $C_{mn}(\tau)$ :

$$\begin{aligned} -\mu_m X_{nm}(z, t) - \mu_m Y'_{nm}(z, t) + \lambda_n Z_{nm} &= f_{nm}^1(t); \\ -\lambda_n X_{nm}(z, t) - \lambda_n Y'_{nm}(z, t) - \mu_m Z_{nm}(z, t) &= f_{nm}^2(t); \\ X'_{nm}(z, t) + \mu_m^2 Y_{nm}(z, t) + \lambda_n^2 Y_{nm}(z, t) &= f_{nm}^3(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Для получения развернутой формы выражений (15) подставим в него вытекающие из (12) соотношения для  $X_{nm}(z, t)$ ,  $Y'_{nm}(z, t)$ ,  $Z_{nm}(z, t)$ ,  $X'_{nm}(z, t)$ . Отметим, что штрихом далее обозначается производная по координате  $z$ . Запишем теперь формулы для производных  $X'_{nm}(z, t)$ ,  $Y'_{nm}(z, t)$  и приведем развернутую форму вида системы (15):

$$\left\{ \begin{aligned} -\mu_m \int_0^t A_{mn}(\tau) J_0(a_{mn}(t-\tau)) d\tau - \mu_m B_{nm}(t) + \lambda_n \int_0^t C_{mn}(\tau) J_0(b_{mn}(t-\tau)) d\tau &= f_{nm}^1(t); \\ -\lambda_n \int_0^t A_{mn}(\tau) J_0(a_{mn}(t-\tau)) d\tau - \lambda_n (B_{nm}(t)) - \mu_m \int_0^t C_{mn}(\tau) J_0(b_{mn}(t-\tau)) d\tau &= f_{nm}^2(t); \\ A_{nm}(t) + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \int_0^t B_{mn}(\tau) J_0(b_{mn}(t-\tau)) d\tau &= f_{nm}^3(t). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Выражения (16) представляют собой *систему интегральных уравнений Вольтерра* для функций  $A_{mn}(t)$ ,  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{mn}(t)$  в предположении, что правые части этих уравнений заданы, то есть функции  $f_{nm}^1(t)$ ,  $f_{nm}^2(t)$ ,  $f_{nm}^3(t)$  известны. В этом случае имеет место *прямая задача теории упругости* при заданных на границе перемещениях, которые были разложены по собственным функциям, обеспечивающим удовлетворение принимаемых граничных условий на «боковых гранях» введенного параллелепипеда.

Будем решать систему интегральных уравнений с использованием численного метода, состоящего в аппроксимации интегралов, входящих в (16) конечными суммами. Если условно разделить временной интервал исследуемого процесса  $T$  на  $M$  шагов по времени, то можно переписать систему (16) с использованием дискретных величин:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu_m \sum_{i=1}^{m_t} A_{mn}^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0(a_{mn}(m_t\Delta t - \tau)) d\tau - \mu_m B_{nm}^{m_t} + \\ + \lambda_n \sum_{j=1}^{m_t} C_{mn}^j \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} J_0(b_{mn}(m_t\Delta t - \tau)) d\tau = f_{nm}^1(m_t\Delta t); \\ -\lambda_n \sum_{i=1}^{m_t} A_{mn}^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0(a_{mn}(m_t\Delta t - \tau)) d\tau - \\ - \lambda_n B_{nm}^{m_t} - \mu_m \sum_{k=1}^{m_t} C_{mn}^k \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} J_0(b_{mn}(m_t\Delta t - \tau)) d\tau = f_{nm}^2(m_t\Delta t); \\ A_{nm}^{m_t} + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \sum_{j=1}^{m_t} B_{mn}^j \int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} J_0(b_{mn}(m_t\Delta t - \tau)) d\tau = f_{nm}^3(m_t\Delta t). \end{array} \right. \quad (17)$$

После чего можно представить соотношения (17) в матричном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -K_{nm}^{1,1} A_{mn} - K_{nm}^{1,2} B_{nm} + K_{nm}^{1,3} C_{nm} = f_{nm}^1; \\ -K_{nm}^{2,1} A_{mn} - K_{nm}^{2,2} B_{nm} - K_{nm}^{2,3} C_{nm} = f_{nm}^2; \\ EA_{mn} + K_{nm}^{3,2} B_{nm} = f_{nm}^3. \end{array} \right. \quad (18)$$

В системе (18) под введенными величинами понимаются уже матрицы и векторы, отвечающие изменению рассматриваемых функций во времени. Запишем решение этой системы уравнений с помощью *метода Крамера*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -K_{nm}^{1,1} & -K_{nm}^{1,2} & K_{nm}^{1,3} \\ -K_{nm}^{2,1} & -K_{nm}^{2,2} & -K_{nm}^{2,3} \\ E & K_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{nm}^1 & -K_{nm}^{1,2} & K_{nm}^{1,3} \\ f_{nm}^2 & -K_{nm}^{2,2} & -K_{nm}^{2,3} \\ f_{nm}^3 & K_{nm}^{3,2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$A_{nm} = \Delta_1 \Delta^{-1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -K_{nm}^{1,1} & f_{nm}^1 & K_{nm}^{1,3} \\ -K_{nm}^{2,1} & f_{nm}^2 & -K_{nm}^{2,3} \\ E & f_{nm}^3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -K_{nm}^{1,1} & -K_{nm}^{1,2} & f_{nm}^1 \\ -K_{nm}^{2,1} & -K_{nm}^{2,2} & f_{nm}^2 \\ E & K_{nm}^{3,2} & f_{nm}^3 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$B_{nm} = \Delta_2 \Delta^{-1}, \quad C_{nm} = \Delta_3 \Delta^{-1}.$$

Отметим, что пара индексов  $n, m$  определяет номер коэффициента в соответствующих двойных рядах Фурье. Решение системы (18) получается в виде набора временных зависимостей  $A_{nm}(t)$ ,  $B_{nm}(t)$ ,  $C_{nm}(t)$  с учетом дискретного изменения времени. По этим известным коэффициентам можно рассчитать перемещения в любой точке, находящейся на некоторой глубине полупространства. Для этого запишем формулы (14) в развернутом виде:

$$u_x(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\mu_m H\left(t - \frac{z}{c_1}\right) \int_0^{t - \frac{z}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_1}\right)^2}\right) d\tau - \right. \\ \left. -\mu_m H\left(t - \frac{z}{c_2}\right) \left[ B_{nm}\left(t - \frac{z}{c_2}\right) + \int_0^{t - \frac{z}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) z b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}} d\tau \right] + \right. \\ \left. + \lambda_n H\left(t - \frac{z}{c_2}\right) \int_0^{t - \frac{z}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) d\tau \right] \sin(\mu_m x) \cos(\lambda_n y); \quad (20)$$

$$u_y(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\lambda_n H\left(t - \frac{z}{c_1}\right) \int_0^{t - \frac{z}{c_1}} A_{mn}(\tau) J_0\left(a_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_1}\right)^2}\right) d\tau - \right. \\ \left. -\lambda_n H\left(t - \frac{z}{c_2}\right) \left[ B_{nm}\left(t - \frac{z}{c_2}\right) + \int_0^{t - \frac{z}{c_2}} B_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(b_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) z b_{nm}}{c_2^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}} d\tau \right] - \right.$$

$$-\mu_m H\left(t - \frac{z}{c_2}\right) \int_0^{\frac{t-z}{c_2}} C_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) d\tau \cos(\mu_m x) \sin(\lambda_n y); \quad (21)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( H\left(t - \frac{z}{c_1}\right) \left( A_{nm} \left(t - \frac{z}{c_1}\right) + \int_0^{\frac{t-z}{c_1}} A_{nm}(\tau) \frac{J_1\left(a_{nm} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_1}\right)^2}\right) z a_{nm}}{c_1^2 \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_1}\right)^2}} d\tau \right) + \right. \\ \left. + (\mu_m^2 + \lambda_n^2) H\left(t - \frac{z}{c_2}\right) \int_0^{\frac{t-z}{c_2}} B_{mn}(\tau) J_0\left(b_{mn} \sqrt{(t-\tau)^2 - \left(\frac{z}{c_2}\right)^2}\right) d\tau \right) \times \\ \cos(\mu_m x) \cos(\lambda_n y). \quad (22)$$

**Результаты моделирования.** Выполним расчет перемещений упругого полупространства на основании полученных выше зависимостей. Пусть заданы функции распределения перемещений по поверхности полупространства (граничные условия). Их изменения во времени и по пространственным координатам показано на рис. 2, 3.

Модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала полупространства принятые  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup> соответственно. Рассчитаем изменение перемещений по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $t$  на глубине полупространства  $z = 0.2$  м.

При численных расчетах учитывались первые десять членов в каждом из направлений в соответствующих двойных рядах Фурье. Интервал моделирования  $T = 0.0002$  с, разбивался на 80 шагов по времени.

На рис. 4 тонкой черной кривой показано перемещения на глубине упругого полупространства в точке с координатами (3.9; 4.5), а серой линией для сопоставления – перемещение точки на поверхности упругого полупространства, имеющей те же абсциссу и ординату.



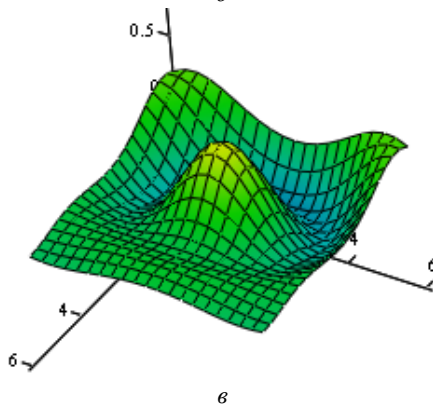
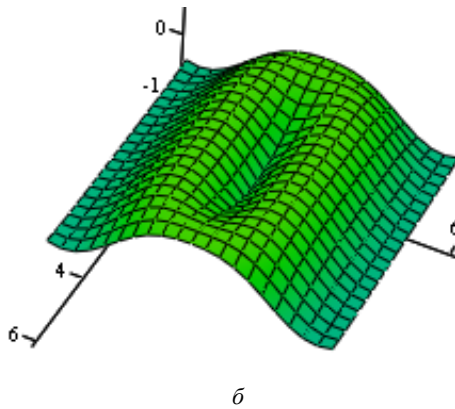
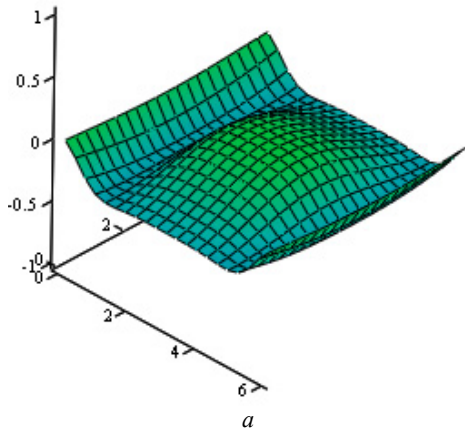
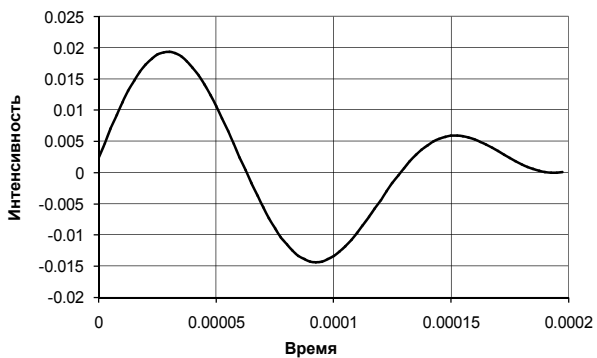
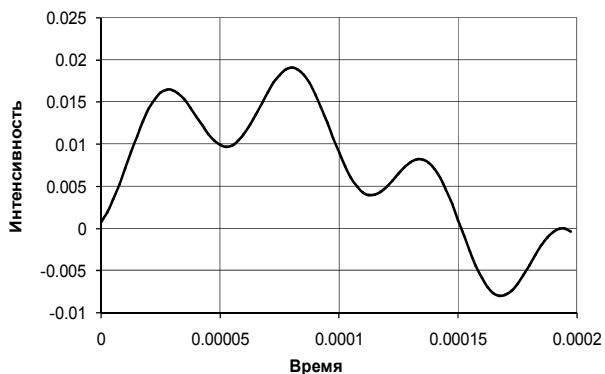


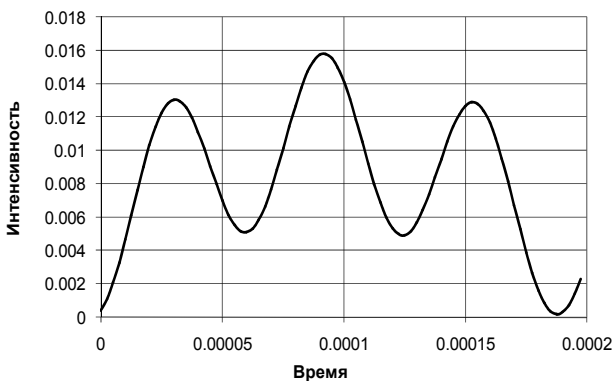
Рис. 2 – Поля граничных условий для прямой задачи:  
 а – распределение  $u_x$ ; б – распределение  $u_y$ ;  
 в – распределение  $u_z$  по поверхности полупространства.



*a*

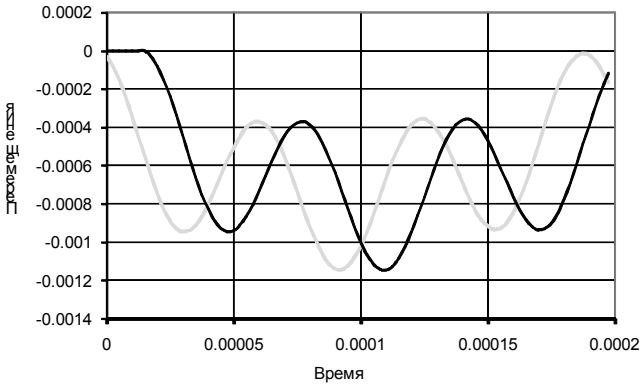


*b*

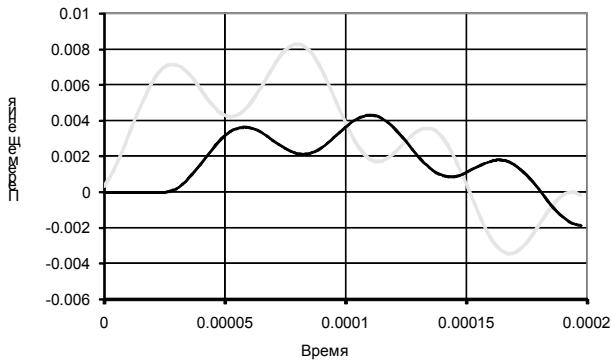


*v*

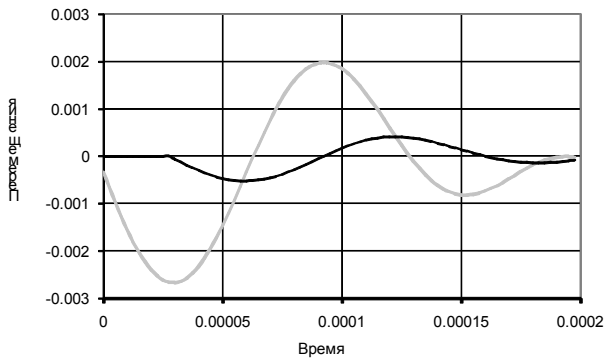
Рис. 3 – Графики граничных условий для прямой задачи:  
*a* – изменение перемещений вдоль оси  $x$  ;  
*b* – вдоль оси  $y$  ; *v* – вдоль оси  $z$  во времени.



*a*



*б*



*в*

Рис. 4 – Зависимости перемещений в точке от времени: *a* – перемещение вдоль оси *z*; *б* – вдоль оси *y*; *в* – вдоль оси *x*.

**Выводы.** Представленные результаты демонстрируют хорошую эффективность разработанного метода решения конкретной трехмерной задачи теории упругости, отражающей начальную деформацию полупространства. Разработанный подход к методу решения нестационарной задачи теории упругости, когда в качестве объекта исследования рассматривается упругое полупространство, расширяет возможности использованных методик к решению не только прямых задач математической физики, но и к решению так называемых обратных задач. Когда в качестве объекта исследования принимают неизвестные импульсные поверхностные нагрузки или неизвестные коэффициенты основных определяющих уравнений, например модуль упругости упругой среды, плотность этой среды или же коэффициент Пуассона.

**Список литературы:** 1. Дидкин В. А. Операционное исчисление / В. А. Дидкин, А. П. Прудников // М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 2. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости // М.: Наука, 1986. – 328 с. 3. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи // Киев: Наук. думка, 1976. – 224 с. 4. Янютин Е. Г. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский // Харьков: Изд-во ХАДИ, 2001. – 184 с.

*Поступила в редколлегию 20.02.2013*

---

УДК 539.3

**Начальное деформирование упругого полупространства при кинематическом воздействии / Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан, Е. Ю. Толбатов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №5 (979). – С. 240-251. Бібліогр.: 4 назви.**

Аналізуються нестационарні коливання пружного півпростору у випадку коли на його поверхні задано зміну переміщень у часі. Розглянуто невісесиметричну постановку крайової задачі теорії пружності. Розв'язок знаходиться у вигляді розкладання в подвійний ряд Фур'є за двома просторовими координатами. Розглянуто чисельний приклад знаходження переміщень на глибині півпростору у випадку відомих переміщень на поверхні.

**Ключові слова:** півпростір, кинематична дія, невісесиметрична система, система інтегральних рівнянь.

The elastic oscillations of a half-space in case of the kinematical influence set on its surface are described in the article. Nonaxisymmetric statement of the second boundary value problem is considered. The problem is solved by using of expansion in Fourier series. The numerical example on finding of movings on depth of the half-space is considered at the known kinematical impact on it's surface.

**Key words.** Half-space, kinematical influence, nonaxisymmetric system, system of integral equations.