

УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук; проф. НТУ «ХПИ»

ПОТОК ЧЕРЕЗ ВРАЦАЮЩУЮСЯ РЕШЕТКУ ОСЕВОЙ ТУРБОМАШИНЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ S_1

Рассмотрено относительное установившееся течение идеального газа через рабочую решетку осевой турбомашин. Поток разделен на слои произвольными поверхностями S_1 . Трехмерное течение сведено к двумерному без допущения о том, что радиальная компонента скорости и все производные в радиальном направлении сохраняют свои значения, найденные из осесимметричного решения на поверхности S_2 .

Ключевые слова: проточная часть турбомашин, квазитрехмерное течение, рабочая решетка, уравнение неразрывности, уравнение количества движения.

Введение

Эффективность проточных частей турбомашин в значительной степени определяется совершенством лопаток направляющих решеток и рабочих колес. Поэтому проблема создания высокоэкономичных и надежно работающих лопаточных аппаратов была и остается актуальной и находится в центре внимания специалистов, которые занимаются исследованиями и проектированием турбомашин. При достаточно высоком КПД, достигнутом к настоящему времени, повышать эффективность проточных частей можно только при использовании в задачах проектирования новых методов расчета течения, которые позволят находить нетрадиционные решения.

Постановка проблемы и ее современное состояние

Решение уравнений для трехмерного (3D) течения в решетке турбомашин является весьма трудоемкой задачей.

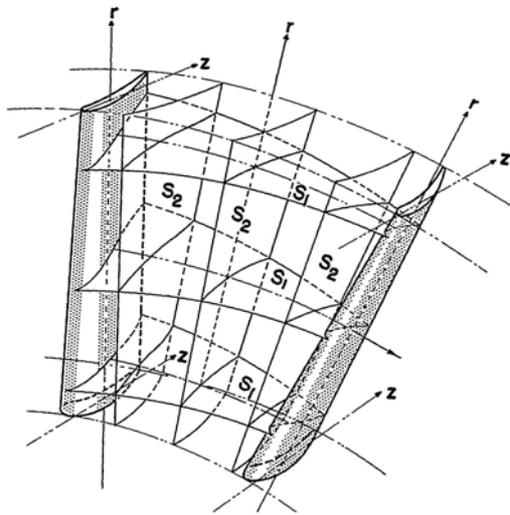


Рис. 1 – Поверхности S_1 и S_2

Для получения приближенного решения используется так называемый квазитрехмерный (Q3D) подход: сначала ищется осесимметричное решение в предположении, что это решение дает удовлетворительные данные по осредненным параметрам потока через решетку, а потом определяют параметры потока в межлопаточном канале как отклонения от средних параметров. Q3D течение в решетках турбин впервые было всесторонне исследовано Ч.Х. Ву, а его работа [1] стала классической. Полагается, что поток движется в слоях переменной толщины по двум поверхностям S_1 и S_2 (рис. 1). Задача решается для каждой поверхности отдельно с учетом взаимного влияния двумерных потоков. В постановке Ч.Х. Ву в задачах на поверхностях S_1 и S_2 для описания течений

используются уравнения Эйлера. Расчеты таких течений выполняются методом кривизны линий тока или методами, использующими решения дифференциальных уравнений в частных производных [2].

В задачах на поверхностях S_1 , для которых полагается, что поверхности имеют ось симметрии, совпадающую с осью турбомашин, 3D-течение может быть сведено к 2D-течению, если течение в слое отнести к поверхности тока, лежащей посередине слоя. И нет необходимости делать допущения о том, что радиальная составляющая скорости и все производные в радиальном направлении являются однородными и сохраняют свои значения, соответствующие осесимметричному решению [3–5].

Сравнения расчетов невязкого 3D-течения и Q3D-течения [6, 7] показало, что отличия в получаемых результатах незначительны, а в ряде случаев наблюдалось лучшее качественное и количественное совпадение результатов экспериментов и расчетов, полученных при решении Q3D-задачи, чем при решении 3D-задачи.

Предмет исследования, основные определения и обозначения

Предмет исследования – относительное установившееся течение идеального газа в межлопаточном канале вращающейся решетки осевой турбомашин. Используется цилиндрическая система координат (r, z, θ) , ось z совпадает с осью турбомашин.

Поверхности S_1 – произвольно скрученные поверхности, не имеющие осевой симметрии. Выбраны слой, ограниченный соседними поверхностями $S_1^{(i)}$ и $S_1^{(i+1)}$, и поверхность тока S_{1mid} , которая лежит посередине между указанными поверхностями. Течение в слое будем относить к срединной поверхности тока S_{1mid} (рис. 2).

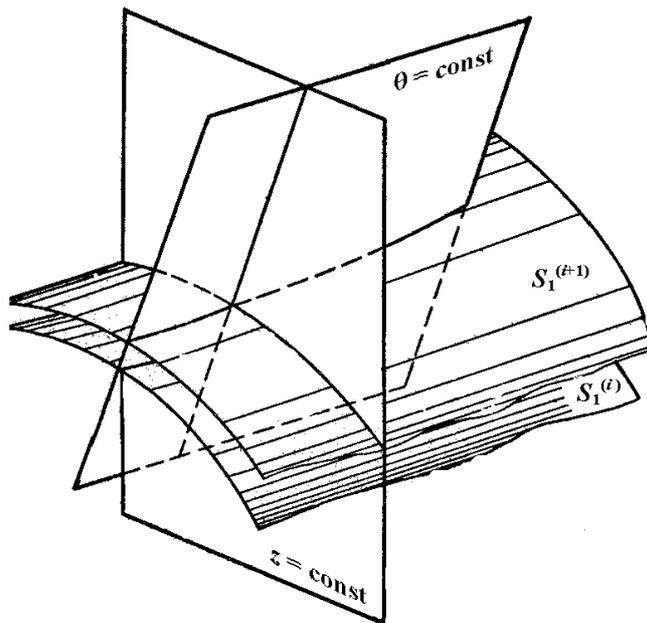


Рис. 2 – Слой переменной толщины

Выберем произвольную точку на поверхности S_{1mid} . Проведем плоскость, касательную к поверхности S_{1mid} в этой точке (назовем плоскость K) и плоскости $\theta = \text{const}$ и $z = \text{const}$, проходящие через эту точку. Линии l_1 и m_1 – линии пересечения поверхности S_{1mid} с плоскостями $\theta = \text{const}$ и $z = \text{const}$, соответственно.

Скорость потока в относительном движении W будем представлять двумя проекциями W_l и W_m на прямолинейные направления l и m . Направление l определяется пересечением плоскости K с плоскостью $\theta = \text{const}$, направление m – пересечением плоскости K с плоскостью $z = \text{const}$. В точке пересечения линий l_1 и m_1

направления l и m касаются их и имеют общее начало.

Угол между координатной осью z и направлением l обозначим δ_z , а угол между окружным направлением u и направлением m – δ_u , тогда $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{n_{1u}}{n_{1r}} = \text{tg } \delta_u$ и

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{n_{1z}}{n_{1r}} = \text{tg } \delta_z, \text{ где } n_1 \text{ – нормаль к поверхности } S_{1mid}.$$

Вычислим угол σ_1 между направлениями l и m . Для этого рассмотрим два единичных вектора e_l и e_m , лежащие на этих направлениях. Эти векторы нетрудно

представить проекциями на оси координат: $e_l = (\sin \delta_z \cos \delta_z \ 0)^T$, $e_m = (\sin \delta_u \ 0 \ \cos \delta_u)^T$. Запишем скалярное произведение этих векторов: $e_{lr} e_{mr} + e_{lz} e_{mz} + e_{lu} e_{mu} = |e_l| |e_m| \cos \sigma_1$, где $|e_l| = |e_m| = 1$. Откуда следует, что $\cos \sigma_1 = \sin \delta_z \sin \delta_u$, а $\sigma_1 = \arccos(\sin \delta_z \sin \delta_u)$.

Установим связь между проекциями скорости потока W_z , W_r , W_u на координатные направления и проекциями этой скорости W_l и W_m . При этом учтем, что вектор W и нормаль n_1 – ортогональные векторы и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, а именно: $W_r n_{1r} + W_u n_{1u} + W_z n_{1z} = 0$. Откуда следует:

$$W_r = W_u \operatorname{tg} \delta_u + W_z \operatorname{tg} \delta_z, \quad W_z = W_l \cos \delta_z, \quad W_u = W_m \cos \delta_u. \quad (1)$$

Введем, как предложил сделать Ч.Х. Ву [1], две производные:

$$\frac{\partial_\theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial_z}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad (2)$$

где первая берется вдоль линии l_1 по переменной z на плоскости $\theta = \text{const}$, а следующая – вдоль линии m_1 по переменной θ на плоскости $z = \text{const}$.

Вывод уравнения неразрывности

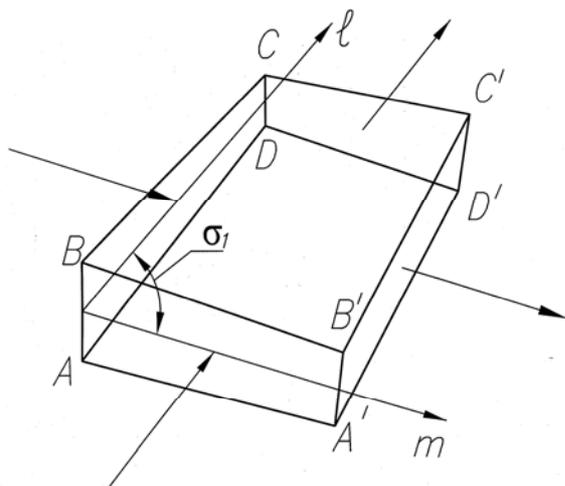


Рис. 3 – К выводу уравнения неразрывности

На поверхности тока S_{1mid} выберем элемент поверхности dS_{1mid} , ограниченный линиями пересечения поверхности S_{1mid} с плоскостями $\theta = \text{const}$, $\theta + d\theta = \text{const}$, $z = \text{const}$ и $z + dz = \text{const}$. В каждой точке элемента dS_{1mid} проведена нормаль до пересечения с поверхностями тока $S_1^{(i)}$ и $S_1^{(i+1)}$, и получен элементарный объем с нормальной толщиной $\tau = \tau(r, z, \theta)$, и весь слой разделен на элементарные объемы.

Рассмотрим элементарный объем, ребра которого обозначим AB , CD , $A'B'$ и $C'D'$ (рис. 3).

Для ребра AB толщина слоя – τ , а радиус элемента dS_{1mid} – r . Тогда величины ребер CD и $A'B'$ равны $\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial z} dz$ и $\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta$, а величину ребра $C'D'$ найдем так:

$$\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial_\theta}{\partial z} \left(\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta \right) = \tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{\partial_{\theta z}^2 \tau}{\partial \theta \partial z} d\theta dz.$$

Определим площади граней элементарного объема, через которые проходит поток:

$$\left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz \right) \sec \delta_z dz \quad \text{для грани } ABCD; \quad \left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta \right) \sec \delta_u r d\theta \quad \text{для грани } ABB'A';$$

$$\left(\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\theta z}^2 \tau}{\partial \theta \partial z} d\theta dz \right) \left(\sec \delta_z + \frac{\partial_z \sec \delta_z}{\partial \theta} d\theta \right) dz \quad \text{для грани } A'B'C'D';$$

$\left(\tau + \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_{z\theta}^2 \tau}{\partial z \partial \theta} dz d\theta\right) \left(\sec \delta_u + \frac{\partial_\theta \sec \delta_u}{\partial z} dz\right) \left(r + \frac{\partial_\theta r}{\partial z} dz\right) d\theta$ для грани $CDD'C'$, и массовые расходы через единицу площади: $\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1$ для грани $ABCD$;
 $\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_z}{\partial \theta} \left(\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1\right) d\theta$ для $A'B'C'D'$; $\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1$ для грани $ABB'A'$ и
 $\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_\theta}{\partial z} \left(\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1\right) dz$ для грани $CDD'C'$.

Приравняем потоки, входящие в элементарный объем через грани $ABCD$, $ABB'A'$ и выходящие из него через грани $A'B'C'D'$, $CDD'C'$:

$$\begin{aligned} & \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz\right) \sec \delta_z dz + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta\right) \sec \delta_u r d\theta = \\ & = \left[\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_z}{\partial \theta} \left(\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1\right) d\theta\right] \times \\ & \times \left(\tau + \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_{z\theta}^2 \tau}{\partial \theta \partial z} d\theta dz\right) \left(\sec \delta_z + \frac{\partial_z \sec \delta_z}{\partial \theta} d\theta\right) dz + \\ & + \left[\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 + \frac{\partial_\theta}{\partial z} \left(\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1\right) dz\right] \times \\ & \times \left(\tau + \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial_{z\theta}^2 \tau}{\partial z \partial \theta} dz d\theta\right) \left(\sec \delta_u + \frac{\partial_\theta \sec \delta_u}{\partial z} dz\right) \left(r + \frac{\partial_\theta r}{\partial z} dz\right) d\theta. \end{aligned}$$

Выполним перемножение и исключим слагаемые третьего и более высоких порядков малости. В результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[\tau \sec \delta_z \frac{\partial_z}{\partial \theta} \left(\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1\right) + \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \sec \delta_z \frac{\partial_z \tau}{\partial \theta} + \frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \tau \frac{\partial_z \sec \delta_z}{\partial \theta}\right] d\theta dz + \\ & + \left[\tau \sec \delta_u r \frac{\partial_\theta}{\partial z} \left(\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1\right) + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \sec \delta_u r \frac{\partial_\theta \tau}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \tau r \frac{\partial_\theta \sec \delta_u}{\partial z} + \frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \tau \sec \delta_u \frac{\partial_\theta r}{\partial z}\right] d\theta dz = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial_z}{\partial \theta} \left(\frac{W_m}{v} \sin \sigma_1 \tau \sec \delta_z\right) + \frac{\partial_\theta}{\partial z} \left(\frac{W_l}{v} \sin \sigma_1 \tau r \sec \delta_u\right) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет в левой части только два слагаемых, которые можно представить как разность вторых смешанных производных непрерывной функции (функции тока), введение которой обратит уравнение неразрывности в тождество.

Система уравнений, описывающая течение на поверхности S_1

Уравнение количества движения для трехмерного установившегося относительного движения идеального газа запишем в скалярном виде:

$$W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u = -v \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (4)$$

$$W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} = -v \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (5)$$

$$W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r = -v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (6)$$

Для замены частных производных по координатным направлениям z и θ воспользуемся выражениями (2), а проекции скорости потока W_z , W_r и W_u заменим проекциями W_m и W_l , учитывая связи (1). Далее сложим уравнения (4) и (5), предварительно умножив уравнение (4) на $\operatorname{tg} \delta_z$, и уравнения (4) и (6), предварительно умножив уравнение (4) на $\operatorname{tg} \delta_u$. Полные производные проекций относительной скорости потока по переменной z , взятые вдоль линии тока определим так: $\frac{dW_l}{dz} = \frac{\partial_0 W_l}{\partial z} + \operatorname{ctg} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial_z W_l}{\partial \theta}$, $\frac{dW_m}{dz} = \frac{\partial_0 W_m}{\partial z} + \operatorname{ctg} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial_z W_m}{\partial \theta}$, где $\operatorname{ctg} \beta = \frac{W_u}{W_z}$. Суммы членов уравнений, которые не содержат производные проекций скорости W_m и W_l , обозначим A_1, A_2, A_3 :

$$\begin{aligned} A_1 = & W_l W_m \left(\frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \cos \delta_z}{\partial \theta} + \cos \delta_z \frac{\partial_0 \cos \delta_u}{\partial z} \right) + \\ & + W_m^2 \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \sin \delta_u}{\partial \theta} + W_l^2 \cos \delta_z \frac{\partial_0 \sin \delta_z}{\partial z} - \frac{(W_m \cos \delta_u)^2}{r} - \omega^2 r + 2\omega W_m \cos \delta_u; \\ A_2 = & W_l \left(W_m \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \cos \delta_z}{\partial \theta} + W_l \cos \delta_z \frac{\partial_0 \cos \delta_z}{\partial z} \right); \\ A_3 = & W_l \left(W_m \frac{\cos \delta_u}{r} \frac{\partial_z \cos \delta_u}{\partial \theta} + W_l \cos \delta_z \frac{\partial_0 \cos \delta_u}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{W_m W_l \cos \delta_u \sin \delta_z + W_m^2 \cos \delta_u \sin \delta_u}{r} + 2\omega (W_l \sin \delta_z + W_m \sin \delta_u). \end{aligned}$$

В результате трехмерное течение отнесено к срединной поверхности S_{1mid} , и уравнение количества движения представлено двумя проекциями, а именно:

$$\begin{aligned} & W_l \cos \delta_z \frac{dW_l}{dz} (\cos \delta_z + \sin \delta_z \operatorname{tg} \delta_z) + \\ & + W_l \cos \delta_z \frac{dW_m}{dz} \sin \delta_u \operatorname{tg} \delta_z + A_1 \operatorname{tg} \delta_z + A_2 = -v \frac{\partial_0 p}{\partial z}; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W_l \cos \delta_z \frac{dW_l}{dz} \sin \delta_z \operatorname{tg} \delta_u + \\ & + W_l \cos \delta_z \frac{dW_m}{dz} (\cos \delta_u + \sin \delta_u \operatorname{tg} \delta_u) + A_1 \operatorname{tg} \delta_u + A_3 = -v \frac{1}{r} \frac{\partial_z p}{\partial \theta}. \quad (8) \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить систему уравнений, описывающую течение через подвижную решетку на скрученной произвольным образом поверхности S_1 , систему уравнений (7, 8) следует дополнить уравнением неразрывности (3), а так же уравнением сохранения энергии в относительном движении и уравнением изоэнтропийного процесса, записанными вдоль линии тока.

Выводы

Вектор скорости потока задается проекциями на два не ортогональных прямолинейными направления, которые – касательные к линиям пересечения произвольно скрученной поверхности тока S_1 с плоскостями $\theta = \text{const}$ и $z = \text{const}$.

Угол между направлениями, на которые проектируется вектор скорости потока, однозначно определяется на основе геометрических характеристик поверхности S_1 .

Для постановки прямой и обратной задач теории решеток достаточно задать граничные условия в виде, предложенном в [4, 5], а методы решения прямой и обратной задач на поверхности вращения без принципиальных изменений будут эффективными и для задач на произвольно скрученной поверхности S_1 .

Результаты исследования, приведенные в статье, – мотив для разработки на поверхности S_2 новых, без осевой симметрии, прямой и обратной задач. Цель – обратная задача, которая сначала определит меридиональные очертания заданной средней поверхности S_2 межлопаточного канала, а потом – всю его геометрию (обратные задачи на поверхностях S_1), включая геометрию активной части лопаток.

Список литературы: 1. Wu, C.-H. A General theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial-, radial-, and mixed-flow types [Text] / C.-H. Wu // *NACA Tech.* – 1952. – Note 2604. – 93 p. 2. Дорфман, Л.А. Ускорение оптимизационных расчетов проточных частей паровых турбин [Текст] / Л.А. Дорфман, Г.И. Архипцев // *Энергомашиностроение.* – 1986. – № 11. – С. 19-21. 3. Жуковский, М.И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах [Текст] / М.И. Жуковский. – Л.: Машиностроение, 1967. – 288 с. 4. Субботович, В.П. Обтекание трехмерным потоком решетки профилей турбомашин на поверхности вращения [Текст] / В.П. Субботович, А.Ю. Юдин, Ф.К. Там // *Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ».* – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 41-46. 5. Субботович, В.П. Обратная задача теории решеток на осесимметричной поверхности тока [Текст] / В.П. Субботович, А.Ю. Юдин, Ф.К. Там // *Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ».* – Х.: НТУ «ХПИ», 2009. – № 3. – С. 56-61. – ISSN 2078-774X. 6. Chima, R.V. Comparison of Two- and Three-Dimensional Flow Computations With Laser Anemometer Measurements in a Transonic Compressor Rotor [Text] / R.V. Chima, A.J. Strazisar // *Trans. ASME: J. Eng. Power.* – 1983. – 105, № 3. – P.596–605. 7. Miller, D.P. The relative merits of an inviscid Euler 3D and quasi-3D analysis for the design of transonic rotors [Text] / D.P. Miller, A.C. Bryans // *ASME Pap.* – 1988. – GT 69. – P. 1-13.

Поступила в редколлегию 15.02.13

УДК 621.165

Поток через вращающуюся решетку осевой турбомашин на произвольной поверхности S_1 [Текст] / В.П. Субботович // *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування.* – Х.: НТУ «ХПИ», 2013. – № 14(988). – С. 43-48. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-774X.

Розглянута відносна стала течія ідеального газу крізь робочу решітку осьової турбомашини. Потік розділений на шари поверхнями течії S_1 , у яких немає вісі симетрії. Тривимірний потік зведений до двовимірної без припущення про те, що радіальна складова швидкості і всі похідні в радіальному напрямі зберігають свої величини, які відповідають розв'язку вісесиметричної задачі на поверхні течії S_2 .

Ключові слова: проточна частина турбомашини, квазітривимірний потік, робоча решітка, рівняння нерозривності, рівняння кількості руху.

In the inter-blade channel of the rotor cascade of axial turbomachine the relative state flow of ideal gas was examined. The flow was separated on layers by the stream-surfaces S_1 . Stream-surfaces do not have the axis of symmetry. The 3D-flow was reduced to 2D-flow without assumption that radial component of velocity and all derivatives in radial direction save the values from axial-symmetric decision on the stream-surface S_2 .

Keywords: flowing pass of turbomachine, quasi-three-dimensional flow, rotor cascade, equation of continuity, momentum equation.