УДК 681.5.013

Ю.И. ДОРОФЕЕВ, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ"

СИНТЕЗ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В СЕТЯХ ПОСТАВОК НА ОСНОВЕ РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОДСИСТЕМ

Предложен подход к решению задачи синтеза децентрализованного управления запасами в сетях поставок. Локальные регуляторы строятся с использованием линейной динамической обратной связи по состоянию. Для подавления влияния возмущений, моделирующих изменения внешнего спроса, одновременно с обеспечением робастной устойчивости замкнутых локальных подсистем применен метод инвариантных эллипсоидов. Важнейшим свойством полученного решения является устойчивость по Ляпунову управляемой сети поставок с децентрализованными регуляторами. Рассмотрен численный пример. Ил.: 2. Табл.: 1. Библиогр.: 15 назв.

Ключевые слова: управление запасами, децентрализованное управление, робастная устойчивость, метод инвариантных эллипсоидов.

Постановка проблемы и анализ литературы. Сеть поставок представляет собой систему, состоящую из совокупности взаимосвязанных объектов, осуществляющих добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распределение ресурсов с целью удовлетворения потребительского спроса и получения прибыли. Модель сети поставок представляют в виде ориентированного графа, вершины которого, соответствующие узлам сети, определяют виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

В процессе функционирования производственных звеньев, ассоциированных с узлами сети поставок, и воздействия внешнего спроса уровни запаса ресурсов в узлах сети изменяются с течением времени. В результате возникает необходимость в разработке стратегий управления запасами для сетей поставок с целью удовлетворения внешнего спроса и минимизации собственных издержек. Под стратегией управления запасами понимается структура правил определения моментов и размеров заказов на пополнение запасов.

С точки зрения теории управления спрос на ресурсы, поступающий из внешней среды, целесообразно рассматривать в качестве внешних возмущающих воздействий. Анализ различных подходов к управлению запасами можно найти в книге [1] и обширной библиографии к ней. Выбор модели управления запасами определяется характером внешнего спроса. На практике, как правило, отсутствует информация для построения адекватной модели спроса. Поэтому в условиях неопределенности спроса используется концепция "неизвестных, но ограниченных" воздействий [2]. При этом соответствующая модель спроса характеризуется интервальной неопределенностью.

Другим источником неопределенности в задачах управления запасами является наличие транспортных запаздываний, обусловленных задержками в пополнении запасов относительно моментов формирования заказов. Предполагается, что значения длительности транспортировки и переработки ресурсов в узлах сети известны. Однако, в процессе функционирования эти параметры могут отличаться от своих номинальных значений. В результате возникает необходимость обеспечения робастности системы управления относительно вариаций указанных параметров.

В задачах синтеза регуляторов часто возникает необходимость учета ограничений на значения переменных. При этом, как правило, рассматривают ограничения, заданные в какой-либо норме. Тогда как спецификой задач управления запасами является неотрицательность значений переменных, что приводит к наличию несимметричных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий.

В последнее десятилетие сформировался новый подход к рассматриваемой проблематике, основанный на концепции инвариантных множеств [3], среди которых особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова.

Большинство процедур, разработанных для анализа и синтеза систем управления запасами в последние десятилетия, используют централизованный подход, когда вся информация о текущем состоянии системы передается на единый регулятор, формирующий управляющие воздействия для всех узлов. Однако, такой способ построения системы управления характеризуется значительной вычислительной сложностью. Поэтому для решения задач управления сетями поставок перспективным представляется децентрализованный подход, при котором исходная оптимизационная задача заменяется набором локальных задач меньшей размерности, решаемых параллельно и независимо друг от друга. Однако, при этом возникает необходимость обеспечения робастной устойчивости системы вцелом с учетом наличия взаимосвязей.

Большое внимание уделено рассмотрению проблемы робастности в децентрализованной структуре управления в работе [4], где условия устойчивости формулируются с использованием техники линейных матричных неравенств (ЛМН). Для уменьшения размерности задачи может быть применена концепция диагональной или блочно-диагональной доминантности, с использованием которой в работе [5] предложен подход, основанный на методе эквивалентных подсистем. Главное преимущество указанного подхода состоит в том, что статическая обратная связь, обеспечивающая робастную устойчивость, строится на уровне отдельных подсистем. Однако, при построении модели авторы не учитывают ограничения, а также не рассматривают внешние воздействия, что является весьма существенным для сетей поставок.

Целью работы является синтез децентрализованной робастной стратегии управления запасами, которая может использоваться для определения в каждый момент времени объемов заказа ресурсов с учетом ограничений на их значения в виде функции от уровней запаса ресурсов в узлах сети, которые позволяют удерживать состояния в ограниченном компактном множестве в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса.

Рассмотрим сеть поставок S, состоящую из N взаимосвязанных узлов S_i, $i = \overline{1, N}$. Для математического описания сети используется дискретная модель в пространстве состояний. В качестве переменных состояний рассматриваются наличные уровни запаса ресурсов. В качестве управляющих воздействий выступают размеры заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами сети в текущем периоде, а возмущениями являются размеры внешнего спроса.

Поведение системы определяется уравнениями, описывающими изменение уровня запаса ресурсов в каждом из узлов сети. Предполагается, что структура сети известна, а состояния доступны непосредственному измерению, при этом измеренные значения состояний поступают только на соответствующие локальные регуляторы. С учетом транспортных задержек каждый из узлов сети поставок описывается разностным уравнением с запаздыванием

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda_i} B_i^t u_i(k-t) + E_i w_i(k), \quad i = \overline{1, N}, \qquad (1)$$

где $x_i(k) \in \mathrm{R}^{n_i}$ – вектор состояний узла S_i; $k = 0, 1, \ldots$ – номер дискретного интервала; $u_i(k) \in \mathrm{R}^{m_i}$ – вектор управляющих воздействий; $w_i(k) \in \mathrm{R}^{n_i}$ – вектор внешних возмущений; Λ_i – максимальное значение запаздывания управляемых потоков между узлом S_i и узлами – поставщиками ресурсов; $B_i^t \in \mathrm{R}^{n_i \times m_i}$, $t = \overline{0, \Lambda_i}$, $E_i \in \mathrm{R}^{n_i \times n_i}$ – матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно, методика построения которых изложена в работе [6].

Внешние воздействия узла S_i включают в себя функции внешнего спроса, формируемого вне сети, и внутреннего спроса, формируемого узлами сети, для которых узел S_i является поставщиком ресурсов:

$$w_i(k) = \sum_{j=1,\, j \neq i}^{N} \Pi_{ij}\, u_j(k) + \Pi_i\, d(k)\,, \tag{2}$$

где $u_j(k) \in \mathrm{R}^{m_j}$ – вектор управлений узла S_j; $d(k) \in \mathrm{R}^q$ – вектор внешнего спроса; $\Pi_{ij} \in \mathrm{R}^{n_i \times m_j}$, $i, j = \overline{1, N}$ – продуктивные матрицы; значение элемента $\Pi_{ij}(p, r)$ равно количеству единиц ресурса $p = \overline{1, n_i}$ узла S_i, необходимого для производства единицы ресурса $r = \overline{1, n_j}$ узлом S_j; $\Pi_i \in \mathrm{R}^{n_i \times q}$ – матрица влияния внешнего спроса.

В процессе функционирования сети должны выполняться локальные ограничения

$$\begin{gathered} x_i(k) \in X_i = \{x_i \in \mathrm{R}^{n_i} : 0 \le x_i \le x_i^{\max}\}, \\ u_i(k) \in U_i = \{u_i \in \mathrm{R}^{m_i} : 0 \le u_i \le u_i^{\max}\},\ i = \overline{1, N}, \end{gathered} \tag{3}$$

где векторы $x_i^{\max}$ и $u_i^{\max}$, определяющие максимальные вместительности хранилищ и максимальные размеры заказов узла S_i, считаются заданными.

Предполагается, что возмущения удовлетворяют ограничениям

$$d(k) \in D = \{d \in \mathrm{R}^q : d^{\min} \le d \le d^{\max}\}\,, \tag{4}$$

где векторы $d^{\min}$ и $d^{\max}$ определяют граничные значения спроса и предполагаются известными.

Выполним преобразование модели (1) к стандартному виду без запаздывания на основе расширения вектора состояний [7], который будет равен

$$\xi_i(k) = [x_i^{\mathrm{T}}(k), u_i^{\mathrm{T}}(k-1), u_i^{\mathrm{T}}(k-2), \ldots, u_i^{\mathrm{T}}(k-\Lambda_i)]^{\mathrm{T}}\,,$$

а уравнения расширенной модели примут вид

$$\xi_i(k+1) = A_i\,\xi_i(k) + B_i u_i(k) + G_i w_i(k), \quad x_i(k) = C_i\,\xi_i(k), \tag{5}$$

где матрицы $A_i \in \mathrm{R}^{N_i \times N_i}$, $B_i \in \mathrm{R}^{N_i \times m_i}$, $G_i \in \mathrm{R}^{N_i \times q_i}$, $C_i \in \mathrm{R}^{n_i \times N_i}$, $N_i = n_i + m_i \Lambda_i$ имеют соответствующую блочную структуру [6].

Рассмотрим построение матрицы динамики A_i расширенной модели узла в случае, когда величина запаздывания управляемых потоков Λ_i отличается от номинального значения. Тогда матрица становится нестационарной и в каждый момент времени k может принимать какое-либо значение из множества

$$A_i(\theta) = \{A_i \in \mathrm{R}^{N_i \times N_i} : A_i = A_i^{(0)} + \sum\nolimits_{j=1}^{L_i} \theta_j(k) A_i^{(j)},\ \theta \in \Theta\}, \tag{6}$$

где $L_i = 2^l$, l – количество узлов, интервалы запаздывания которых могут варьироваться в процессе работы; $\theta_j(k),\ j = \overline{1, L_i}$ – набор параметров, которые описывают неопределенность модели и удовлетворяют требованиям

$$\Theta = \{\theta \in \mathrm{R}^{L_i} :\ \theta_j(k) \ge 0,\ \sum\nolimits_{j=1}^{L_i} \theta_j(k) = 1\}. \tag{7}$$

В результате расширенная модель узла может быть представлена в виде модели с неопределенностью следующего вида:

$$\begin{gathered} \xi_i(k+1) = A_i(\theta)\xi_i(k) + B_i u_i(k) + G_i w_i(k), \\ x_i(k) = C_i\,\xi_i(k), \quad A_i(\theta) \in \Omega_i = \mathrm{Co}\{A_i^{(1)}, \ldots, A_i^{(L_i)}\}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ – выпуклая оболочка; $A_i^{(j)},\ j = \overline{1, L_i}$ – j-я вершина множества Ω_i.

Для системы (8) с параметрической неопределенностью (7) рассматривается задача синтеза децентрализованной стратегии управления запасами, которая для любого допустимого спроса $d(k) \in D$ и любого варианта реализации неопределенности $\forall k \ge 0$ обеспечивает: удовлетворение спроса на ресурсы, то есть выполнение первого из ограничений (3); робастную устойчивость замкнутой системы при ограничениях (3); некоторую гарантированную стоимость управления.

Синтез локальных регуляторов. Первым этапом решения задачи является вычисление граничных значений внешних воздействий каждого из узлов, для чего предлагается следующий алгоритм:

$$\begin{aligned}
&1.\ i=\overline{1,N}:\ d_i^{\min}=\Pi_i d^{\min},\ d_i^{\max}=\Pi_i d^{\max}.\\
&2.\ i=\overline{1,q}:\ \Pi_i^{\min}=\sum\nolimits_{j=1,\,j\neq i}^{q}\Pi_{ij}d_j^{\min},\ \Pi_i^{\max}=\sum\nolimits_{j=1,\,j\neq i}^{q}\Pi_{ij}d_j^{\max},\\
&\quad w_i^{\min}=d_i^{\min}+\Pi_i^{\min},\ w_i^{\max}=d_i^{\max}+\Pi_i^{\max}.\\
&3.\ i=\overline{q+1,N}:\ \Pi_i^{\min}=\sum\nolimits_{j=1}^{i-1}\Pi_{ij}(\Pi_j^{\min}+d_j^{\min}),\quad w_i^{\min}=d_i^{\min}+\Pi_i^{\min},\\
&\quad \Pi_i^{\max}=\sum\nolimits_{j=1}^{i-1}\Pi_{ij}(\Pi_j^{\max}+d_j^{\max}),\quad w_i^{\max}=d_i^{\max}+\Pi_i^{\max}.
\end{aligned}\tag{9}$$

Тогда множество значений внешних воздействий узла S_i может быть аппроксимировано эллипсоидом

$$E(w_i^*,Q_i^w)=\{w_i\in \mathrm{R}^{n_i}:\ (w_i(k)-w_i^*)^{\mathrm{T}}Q_i^{w^{-1}}(w_i(k)-w_i^*)\le 1\},\tag{10}$$

параметры которого Q_i^w, w_i^* определяются в результате решения задачи полуопределенного программирования по аналогии с [8].

Будем строить локальный закон управления в виде линейной динамической обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов

$$u_i(k)=K_i(k)(\xi_i(k)-\xi_i^*),\tag{11}$$

где $K_i(k)\in \mathrm{R}^{m_i\times N_i}$ – нестационарная матрица коэффициентов обратной связи; ξ_i^* – вектор, определяющий размер страховых запасов узла S_i, состоящий из (Λ_i+1) векторов x_i^*, которые вычисляются на основании верхних граничных значений внешних воздействий $w_i^{\max}$

$$x_i^*=\Lambda_i w_i^{\max}.\tag{12}$$

Тогда модель (8) для управления (11) можно представить в виде:

$$\begin{gathered}
\xi_i(k+1)=(A_i(\theta)+B_iK_i(k))(\xi_i(k)-\xi_i^*)+A_i(\theta)\xi_i^*+G_i(w_i(k)-w_i^*)+G_iw_i^*,\\
x_i(k)=C_i\xi_i(k),\quad A_i(\theta)\in\Omega_i.
\end{gathered}\tag{13}$$

Запишем квадратичный критерий качества в случае бесконечного временного горизонта

$$J_i^{\infty}(k)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}((\xi_i(k)-\xi_i^*)^{\mathrm{T}}W_i^{\xi}(\xi_i(k)-\xi_i^*)+u_i^{\mathrm{T}}(k)W_i^{u}u_i(k)),\tag{14}$$

где $0 \prec W_i^{\xi} \in R^{N_i \times N_i}$, $0 \prec W_i^{u} \in R^{m_i \times m_i}$ – диагональные весовые матрицы; "$\succ 0$" – означает положительную определенность матрицы.

Задача синтеза локального гарантирующего управления эквивалентна решению минимаксной задачи

$$u_i(k) = \arg \min_{u_i(k) \in U_i} \Big(\max_{w_i(k) \in E(w_i^*, Q_i^w),\, A_i(\theta) \in \Omega_i} J_i^{\infty}(k) \Big) . \qquad (15)$$

Определим квадратичную модифицированную функцию Ляпунова (ФЛ), построенную на решениях системы (13):

$$V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*) = (\xi_i(k) - \xi_i^*)^{\mathrm{T}} P_i(k)(\xi_i(k) - \xi_i^*), \quad P_i(k) = P_i^{\mathrm{T}}(k) \succ 0. \qquad (16)$$

Вычислим первую разность по k ФЛ (16) и потребуем, чтобы ее значение с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью

$$\begin{gathered} V_i(\xi_i(k+1) - \xi_i^*) - V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*) \le \\ \le -((\xi_i(k) - \xi_i^*)^{\mathrm{T}} W_i^{\xi}(\xi_i(k) - \xi_i^*) + u_i^{\mathrm{T}}(k) W_i^{u} u_i(k)). \end{gathered} \qquad (17)$$

Если неравенство (17) выполняется, то можно показать, что ФЛ (16) $\forall k \ge 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (14). Тогда задача (15) эквивалентна задаче минимизации значения ФЛ

$$u_i(k) = \arg \min_{u_i(k) \in U_i} V_i(\xi_i(k) - \xi_i^*) , \qquad (18)$$

для решения которой применим метод инвариантных эллипсоидов [9].

Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E(\xi_i^*, Q_i(k)) = \{\xi_i \in \mathrm{R}^{N_i} : (\xi_i(k) - \xi_i^*)^{\mathrm{T}} Q_i^{-1}(k)(\xi_i(k) - \xi_i^*) \le 1\} , \qquad (19)$$

называется инвариантным по состоянию для системы (13), если из условия $\xi_i(0) \in E(\xi_i^*, Q_i(k))$ следует, что $\xi_i(k) \in E(\xi_i^*, Q_i(k))$ $\forall k \ge 0$. Другими словами, любая траектория системы, начавшись в инвариантном эллипсоиде, остается в нем для любого дискретного интервала $k \ge 0$.

Эллипсоид (19) выступает в качестве аппроксимации множества достижимости замкнутой системы (13), то есть позволяет характеризовать влияние внешних возмущений и неопределенности значений параметров на траекторию замкнутой системы. Тогда минимизация в некотором смысле инвариантного эллипсоида (19) соответствует робастному управлению системой (13).

Сравнение выражений (19) и (16) позволяет утверждать, что если выполняется тождество $P_i(k) = Q_i^{-1}(k)$, то эллипсоид (19) представляет собой множество, находящееся внутри поверхности уровня ФЛ (16). Тогда задача робастной стабилизации заключается в вычислении в каждый момент $k \geq 0$ матрицы $K_i(k)$ такой, чтобы регулятор (11) обеспечивал минимизацию по некоторому критерию эллипсоида (19) при ограничениях (3). Выберем в качестве критерия сумму квадратов полуосей эллипсоида, то есть след матрицы $Q_i(k)$. Записав неравенства (17) и (10) в виде квадратичных форм относительно составного вектора

$$s_i(k) = [(\xi_i(k) - \xi_i^*)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_i^{*\mathrm{T}}, \ w_i^{*\mathrm{T}}, \ (w_i(k) - w_i^*)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2(N_i + n_i)},$$

и введя матричную переменную $Y_i(k) = K_i(k) Q_i(k)$, с помощью S-процедуры [9] представим их в виде совокупности ЛМН

$$\begin{bmatrix} Q_i(k) & 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times n_i} & \Psi^{\mathrm{T}}(k) & 0_{N_i \times n_i} & Q_i(k) W_i^{\xi} & Y_i^{\mathrm{T}}(k) W_i^u \\ 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times n_i} & A_i^{(j)\mathrm{T}} - I_N & 0_{N_i \times n_i} & 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times m_i} \\ 0_{n_i \times N_i} & 0_{n_i \times N_i} & 0_{n_i \times n_i} & G_i^{\mathrm{T}} & 0_{n_i \times n_i} & 0_{n_i \times N_i} & 0_{n_i \times m_i} \\ \Psi(k) & A_i^{(j)} - I_N & G_i & Q_i(k) & G_i Q_i^{w\,1/2} & 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times m_i} \\ 0_{n_i \times N_i} & 0_{n_i \times N_i} & 0_{n_i \times n_i} & Q_i^{w\,1/2} G_i^{\mathrm{T}} & \alpha_\imath(k) I_{n_i} & 0_{n_i \times N_i} & 0_{n_i \times m_i} \\ W_i^{\xi} Q_i(k) & 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times n_i} & 0_{N_i \times N_i} & 0_{N_i \times n_i} & W_i^{\xi} & 0_{N_i \times m_i} \\ W_i^u Y_i(k) & 0_{m_i \times N_i} & 0_{m_i \times n_i} & 0_{m_i \times N_i} & 0_{m_i \times n_i} & 0_{m_i \times N_i} & W_i^u \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad (20)$$

$$j = \overline{1, L_i}, \quad Q_i(k) \succ 0,$$

где $\Psi(k) = A_i^{(j)} Q_i(k) + B_i Y_i(k)$; $0_{m \times n}$ – нулевая матрица; $\alpha_i(k) > 0$ – некоторый скаляр.

Ограничения (3) на значения состояний и управлений с помощью леммы Шура [9] представим в виде ЛМН

$$\begin{bmatrix} Q_i^x & C_i Q_i(k) \\ Q_i(k) C_i^{\mathrm{T}} & Q_i(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon e_{m_i} (\xi_i(k) - \xi_\imath^*)^+ Y_i^{\mathrm{T}}(k) & Y_i(k) \\ Y_i^{\mathrm{T}}(k) & Q_i(k) \end{bmatrix} \preceq 0, \qquad (21)$$

$$\begin{bmatrix} u_i^{\max}(\xi_i(k)-\xi_i^*)^+ Y_i^{\mathrm{T}}(k) & Y_i(k) \\ Y_i^{\mathrm{T}}(k) & Q_i(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad (22)$$

где $Q_i^x \in \mathrm{R}^{n_i \times n_i}$ – матрица эллипсоида наименьшего объема, аппроксимирующего множество X_i; $e_{m_i} = [1, 1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{m_i \times 1}$; $\varepsilon > 0$ – малая константа; " + " – псевдообращение Мура-Пенроуза.

Именно наличие ЛМН (21), (22) приводит к закону управления в виде динамической обратной связи, поскольку матрицы неравенств зависят от текущего значения вектора состояний $\xi_i(k)$.

Тогда результат решения задачи синтеза робастного гарантирующего управления запасами для локальной подсистемы может быть представлен в виде следующей теоремы.

Теорема. Рассмотрим систему (13) с параметрической неопределенностью (7) и ограничениями (3) и пусть матрицы $\hat{Q}_i(k), \hat{Y}_i(k)$ получены в результате решения оптимизационной задачи

$$\mathrm{trace}(Q_i(k)) \to \min \qquad (23)$$

при ограничениях (20) – (22).

Если указанная задача, которая является задачей полуопределенного программирования, имеет решение, то: для любого начального состояния $x_i(0) \ge x_i^*$, $u_i(k) = 0_{m_i \times 1}$ $\forall k \le 0$ и любого значения $A_i(\theta) \in \Omega_i$, а также возмущения $w_i(k) \in E(w_i^*, Q_i^w)$ подсистема (13) является робастно устойчивой при ограничениях (3); среди всех линейных управлений вида (11) регулятор с матрицей $K_i(k) = \hat{Y}_i(k)\hat{Q}_i^{-1}(k)$ доставляет минимум по критерию следа матрицы инвариантному эллипсоиду (19) в момент k.

Доказательство теоремы аналогично доказательству, приведенному в [10], с очевидными техническими изменениями.

Анализ устойчивости децентрализованной системы управления запасами. Представим уравнение динамики замкнутой расширенной модели узла S_i с учетом взаимосвязей (2) в следующем виде

$$\xi_i(k+1) = A_i(\theta)(\xi_i(k)-\xi_i^*) + A_i(\theta)\xi_i^* + \sum\nolimits_{j=1,\, j\ne i}^{N} F_{ij}(k)(\xi_j(k)-\xi_j^*) + F_i d(k), \quad (24)$$

где $F_{ij}{}^{\mathrm{T}}(k) = [E_i \Pi_{ij} K_j(k)\ \ 0_{m_i \times N_j}\ \ldots\ 0_{m_i \times N_j}]$; $F_i^{\mathrm{T}} = [E_i \Pi_i\ \ 0_{m_i \times q}\ \ldots\ 0_{m_i \times q}]$.

Для анализа устойчивости управляемой сети поставок S с децентрализованными регуляторами применим метод сравнения и математический аппарат векторных функций Ляпунова [11].

Сформируем для системы S векторную функцию Ляпунова

$$V(\xi(k)-\xi^*) = [v_1(\xi_1(k)-\xi_1^*),\ldots,v_N(\xi_N(k)-\xi_N^*)]^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

где $\xi(k) = [\xi_1^{\mathrm{T}}(k),\ \ldots,\ \xi_N^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$; $\xi^* = [\xi_1^{*\mathrm{T}},\ \ldots,\ \xi_N^{*\ \mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

Компонентами функции (25) являются ФЛ локальных подсистем в форме Шилака [12]

$$v_i(\xi_i(k)-\xi_i^*) = ((\xi_i(k)-\xi_i^*)^{\mathrm{T}} P_i(k)(\xi_i(k)-\xi_i^*))^{1/2},\ i=\overline{1,N}.$$

На основе векторной ФЛ (25) сформируем общую ФЛ

$$V_0(\xi(k)-\xi^*) = P_0 V(\xi(k)-\xi^*), \tag{26}$$

где $P_0 = [p_{01},\ldots,p_{0N}]$, $p_{0i} > 0$, $i=\overline{1,N}$.

Сопоставим набору подсистем линейную систему сравнения (ЛСС), определяемую разностными уравнениями

$$\begin{gathered} \upsilon(k+1) = \Lambda(k)\,\upsilon(k), \quad \upsilon(0) = V(\xi(0)-\xi^*), \\ \eta(k) = P_0\,\upsilon(k), \end{gathered} \tag{27}$$

где $\upsilon = [\upsilon_1^{\mathrm{T}},\ldots,\upsilon_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ – вектор состояний ЛСС; η – скалярная функция, являющаяся выходом ЛСС.

Вычисление элементов нестационарной матрицы $\Lambda(k)$ производится по характеристическому уравнению пучка квадратичных форм

$$\begin{gathered} \det((A_i(\theta)+B_iK_i(k))^{\mathrm{T}} P_i(k)(A_i(\theta)+B_iK_i(k)) - \mu_{ii}(k)P_i(k)) = 0, \quad i=\overline{1,N}, \\ \det(F_{ij}^{\mathrm{T}}(k)P_i(k)F_{ij}(k) - \mu_{ij}(k)P_j(k)) = 0, \quad i,j=\overline{1,N},\ j \neq i, \end{gathered} \tag{28}$$

где $\lambda_{ij}(k) = [\mu_{ij}^{\max}(k)]^{1/2}$; $\mu_{ij}^{\max}(k)$ – максимальное значение корня соответствующего характеристического уравнения.

В работе [13] сформулирована теорема, согласно которой для векторной (25) и общей (26) функций Ляпунова справедливы следующие неравенства, если элементы матрицы $\Lambda(k)$ определяются согласно (28):

$$V(\xi(k)-\xi^*) \le \upsilon(k), \quad V_0(\xi(k)-\xi^*) \le \eta(k). \tag{29}$$

Элементы матрицы $\Lambda(k)$ можно трактовать следующим образом: диагональные элементы $\lambda_{ii}(k)$ дают оценку сверху коэффициентов передачи подсистем S_i, а внедиагональные элементы $\lambda_{ij}(k)$ дают оценку сверху коэффициентов взаимосвязи между подсистемами S_i и S_j. Таким образом, система сравнения (27) покомпонентно мажорирует векторную (25) и общую (26) функции Ляпунова. В результате анализ устойчивости управляемой сети поставок S с децентрализованными регуляторами сводится к анализу ЛСС (27).

При построении модели сети поставок узлы нумеруются и группируются в соответствии со стадиями переработки сырья и полуфабрикатов, начиная с тех, на которые поступает внешний спрос. В результате, если граф, представляющий модель сети, не имеет циклов, то матрица динамики $\Lambda(k)$ системы сравнения является нижнетреугольной. Поскольку замкнутые локальные подсистемы являются устойчивыми, то значения диагональных элементов матрицы $\Lambda(k)$ являются положительными и меньше единицы: $0 < \lambda_{ii}(k) < 1$. В результате $\forall k$ $\Lambda(k)$ является нильпотентной и, таким образом, система сравнения (27) является устойчивой. Следовательно, управляемая сеть поставок S, состоящая из взаимосвязанных подсистем S_i, $i=\overline{1,N}$, замкнутых локальными обратными связями с децентрализованными регуляторами (11), является устойчивой по Ляпунову.

Численный пример. В качестве примера рассмотрим сеть поставок, которая изучалась в работе [14]. Модель сети описывается графом $G=(\{1,2,3,4,5\},\{(5,1),(5,2),(5,3),(4,3),(3,1),(3,2)\})$. Каждый из 5 узлов является однономенклатурной системой, то есть $n_i=1$, $i=\overline{1,5}$. Представим управляемые потоки u_1, u_2, u_3, описывающие процессы сборки, в виде гипердуг, добавив два потока u_4 и u_5, которые описывают поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2, изображенные пунктиром, представляют внешний спрос. Значение времени транспортировки $T_{i,j}$ и количество единиц продукции Π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом, указаны для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках, соответственно. Возле каждого узла указаны значения времени выполнения заказа T_i .

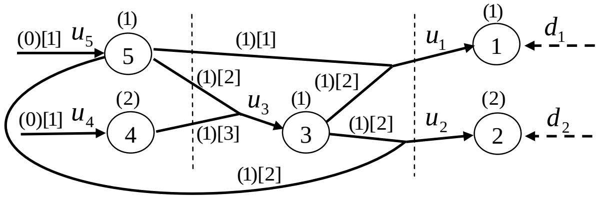


Рис. 1. Графическое представление модели сети

По формуле $\Lambda_i = \max\{T_{j,i} + T_i,\ j = \overline{1,5},\ \ j \neq i\},\ i = \overline{1,5}$ определим величины запаздывания управляемых потоков всех узлов. В результате размерности расширенных моделей подсистем равны: $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 3$, $N_4 = 2$, $N_5 = 3$. Пусть время транспортировки ресурсов между узлами 3 и 1 в процессе функционирования может увеличиваться на один период, т.е. $T_{3,1} \in \{1, 2\}$. Тогда величина запаздывания управляемых потоков узла 1 может принимать значение из множества $\Lambda_1 \in \{2, 3\}$. В результате $A_1(\theta) \in \Omega_1 = \mathrm{Co}\{A_1^{(1)}, A_1^{(2)}\}$, где

$$A_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Граничные значения внешнего спроса предполагаются известными: $d^{\min} = [10, 5]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [20, 10]^{\mathrm{T}}$. С помощью алгоритма (9) вычислим граничные значения внешних воздействий: $w^{\min} = [10, 5, 30, 90, 80]^{\mathrm{T}}$, $w^{\max} = [20, 10, 60, 180, 160]^{\mathrm{T}}$. В соответствии с (12) вычислим размеры страховых запасов x_i^*, $i = \overline{1,5}$. Следуя [8], вычислим параметры эллипсоидов, аппроксимирующих множества значений внешних воздействий (в рассматриваемом примере эллипсоиды вырождаются в отрезки): $Q_1^w = 25,\ \ w_1^* = 15$; $Q_2^w = 6.25,\ \ w_2^* = 7.5$; $Q_3^w = 225,\ \ w_3^* = 45$;

$Q_4^w = 2025,\ \ w_4^* = 135$; $Q_5^w = 1600,\ \ w_5^* = 120$; а также параметры эллипсоидов, аппроксимирующих множества значений состояний: $Q_1^x = 1600$, $Q_2^x = 900$, $Q_3^x = 14400$, $Q_4^x = 129600$, $Q_5^x = 25600$.

Граничные значения состояний и управлений, начальные условия, а также размеры страховых запасов для всех узлов представлены в таблице, где также приведены выбранные значения диагональных элементов весовых матриц локальных критериев качества (14).

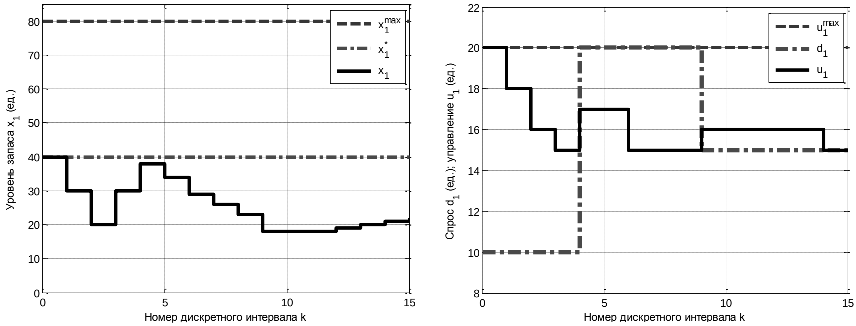
Таблица

Характеристики узлов сети поставок

i	$x_i^{\max}$, ед.	$u_i^{\max}$, ед.	x_i^*, ед.	$x_i(0)$, ед.	w_i^{ξ}	w_i^u
1	80	20	40	40	5.0	1.0
2	60	10	30	30	3.0	1.2
3	240	55	120	120	4.0	2.0
4	720	150	360	360	5.0	1.0
5	320	160	160	160	2.0	1.3

Решение задачи (23) при ограничениях (20) – (22) получено с помощью пакета CVX [15]. Результаты моделирования для узла 1 при скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2, где *а* – значения граничного, страхового и наличного уровней запаса; *б* – значения внешнего спроса и объемов заказов.

Построим векторную (25) и общую (26) функции Ляпунова, выбрав $P_0 = [100, 120, 5, 0.1, 0.1]$, а затем – систему сравнения (27). Матрица динамики системы сравнения $\Lambda(k)\ \forall k$ является нильпотентной, следовательно, система управления запасами с децентрализованными регуляторами является устойчивой. Поскольку в момент начала моделирования каналы транспортировки ресурсов не были загружены, во всех узлах наблюдаются переходные процессы, длительности которых совпадают со значениями интервалов запаздывания управляемых потоков. Анализ результатов позволяет сделать вывод, что локальные регуляторы обеспечивают полное и своевременное удовлетворение как внешнего, так и внутреннего спроса на ресурсы. При этом выполняются заданные локальные ограничения, поскольку объемы наличных запасов ресурсов и объемы заказов не превышают граничные значения.



а *б*

Рис. 2. Графики переходных процессов для узла 1 сети поставок

Выводы. В работе предложен подход к решению задачи синтеза децентрализованного управления запасами в сетях поставок. Локальные регуляторы строятся с использованием линейной динамической обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запаса ресурсов. Для подавления влияния возмущений, моделирующих изменения внешнего спроса, одновременно с обеспечением робастной устойчивости замкнутых локальных подсистем применен метод инвариантных эллипсоидов, что позволило сформулировать задачу в терминах линейных матричных неравенств, а синтез управления свести к последовательности задач полуопределенного программирования.

Новизна и практическая полезность работы заключается в усовершенствовании методики анализа устойчивости динамических управляемых сетевых систем на основе метода сравнения и метода векторных функций Ляпунова.

Список литературы: **1.** *Лотоцкий В.А.* Модели и методы управления запасами / *В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель*. – М.: Наука, 1991. – 188 с. **2.** *Bertsekas D.P.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / *D.P. Bertsekas, I. Rhodes* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117-128. **3.** *Blanchini F.* Set theoretic methods in control / *F. Blanchini, S. Miani*. – Boston: Birkhäuser, 2008. – 504 p. **4.** *Šiljak D.D.* Decentralized Control of Complex Systems / *D.D. Šiljak*. – New York, Academic Press, 1991. – 527 p. **5.** *Rosinova D.* Robust decentralized controller design: subsystem approach / *D. Rosinova, N.Q. Thuan, V. Vesely, L. Marko* // Journal of Electrical Engineering. – 2012. – Vol. 63. – №. 1. – P. 28-34. **6.** *Дорофеев Ю.И.* Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / *Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко* // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16-27. **7.** *Blanchini F.* Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / *F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Trans. on Robot. and Autom. – 2000. – Vol. RA-16. – №. 3. – P. 313-317. **8.** *Дорофеев Ю.И.* Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием линейных матричных неравенств / *Ю.И. Дорофеев* // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2014. – Вип. 4 (41). – С. 34-41. **9.** *Поляк Б.Т.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств / *Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков*. – М.: Ленанд, 2014. – 560 с. **10.** *Дорофеев Ю.И.* Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / *Ю.И. Дорофеев, Л.М. Любчик, А.А. Никульченко* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 5. – С. 146-160. **11.** *Воронов А.А.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / *А.А. Воронов, В.М. Матросов*. – М.: Наука, 1987. – 312 с. **12.** *Šiljak D.D.* Robust stability of discrete systems / *D.D. Šiljak, M.E. Sezer* // Int. J. Control. – 1988. – Vol. 48 (5). – P. 2055-2063. **13.** *Бобцов В.В.* Управление непрерывными и дискретными процессами / *В.В. Бобцов, Г.И. Болтунов, С.В. Быстров, В.В. Григорьев*. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. – 175 с. **14.** *Hennet J.-C.* A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control / *J.-C. Hennet* // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 793-805. **15.** *Grant M.* CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21. / *M. Grant, S. Boyd.* – Режим доступа : http://cvxr.com/cvx.

Bibliography (transliterated): 1. *Lotockij V.A.* Modeli i metody upravlenija zapasami / *V.A. Lotockij, A.S. Mandel'.* – M.: Nauka, 1991. – 188 p. **2.** *Bertsekas D.P.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / *D.P. Bertsekas, I. Rhodes* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117-128. **3.** *Blanchini F.* Set theoretic methods in control / *F. Blanchini, S. Miani*. – Boston: Birkhäuser, 2008. – 504 p. **4.** *Šiljak D.D.* Decentralized Control of Complex Systems / *D.D. Šiljak*. – New York, Academic Press, 1991. – 527 p. **5.** *Rosinova D.* Robust decentralized controller design: subsystem approach / *D. Rosinova, N.Q. Thuan, V. Vesely, L. Marko* // Journal of Electrical Engineering. – 2012. – Vol. 63. – №. 1. – P. 28-34. **6.** *Dorofeev Ju.I.* Postroenie matematicheskih modelej upravljaemyh setej postavok s uchetom zapazdyvanij potokov / *Ju.I. Dorofeev, A.A. Nikul'chenko* // Sistemni doslidzhennja ta informacijni tehnologiï. – 2013. – № 1. – S. 16-27. **7.** *Blanchini F.* Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / *F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich* // IEEE Trans. on Robot. and Autom. – 2000. – Vol. RA-16. – № 3. – P. 313-317. **8.** *Dorofeev Ju.I.* Sintez sistemy optimal'nogo upravlenija zapasami s diskretnym PID-reguljatorom s ispol'zovaniem linejnyh matrichnyh neravenstv / *Ju.I. Dorofeev* // Zbirnik naukovih prac' Harkivs'kogo universitetu Povitrjanih Sil. – H.: HUPS, 2014. – Vip. 4 (41). – P. 34-41. **9.** *Poljak B.T.* Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushhenijah: tehnika linejnyh matrichnyh neravenstv / *B.T. Poljak, M.V. Hlebnikov, P.S. Shherbakov*. – M.: Lenand, 2014. – 560 p. **10.** *Dorofeev Ju.I.* Robastnoe stabilizirujushhee upravlenie zapasami v setjah postavok v uslovijah neopredelennosti vneshnego sprosa i intervalov zaderzhki popolnenija zapasov / *Ju.I. Dorofeev, L.M. Ljubchik, A.A. Nikul'chenko* // Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija. – 2014. – № 5. – P. 146-160. **11.** *Voronov A.A.* Metod vektornyh funkcij Ljapunova v teorii ustojchivosti / *A.A. Voronov, V.M. Matrosov*. – M.: Nauka, 1987. – 312 p. **12.** *Šiljak D.D.* Robust stability of discrete systems / *D.D. Šiljak, M.E. Sezer* // Int. J. Control. – 1988. – Vol. 48 (5). – P. 2055-2063. **13.** *Bobcov V.V.* Upravlenie nepreryvnymi i diskretnymi processami */ V.V. Bobcov, G.I. Boltunov, S.V. Bystrov, V.V. Grigor'ev*. – SPb.: SPbGU ITMO, 2010. – 175 p. **14.** *Hennet J.-C.* A bimodal scheme for multi-stage production and inventory control / *J.-C. Hennet* // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 793-805. **15.** *Grant M.* CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 / *M. Grant, S. Boyd*. – Rezhim dostupa : http://cvxr.com/cvx.

Поступила (received) 28.09.2015

Статью представил д-р техн. наук, проф. кафедры компьютерной математики и математического моделирования НТУ "ХПИ" Любчик Л.М.

Dorofieiev Yuri, Cand.Tech.Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Frunze, 21, Kharkiv, Ukraine, 61002
tel./phone. (057) 707-61-03, e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu
ORCID ID: 0000-0002-7964-1286