УДК 517.946

Н.К. МАМАДАЛИЕВ, канд. физ.-мат. наук, доц. НУУз, Ташкент,
А.А. АБДУЛЛАЕВ, аспирант, НУУз, Ташкент

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ-ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

В данной работе впервые доказано однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, где линия вырождения является огибающей семейства характеристик и сама также является характеристикой. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – методом интегральных уравнений. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, условия Пуанкаре, уравнения эллиптико-гиперболического типа, уравнения смешанного типа второго рода.

Постановка проблемы. Уравнение смешанного типа благодаря приложениям при решении многих важных вопросов прикладного характера: теории газовой динамики, электронного рассеивания, бесконечно малых изгибаний поверхностей, прогнозирования уровня грунтовых вод, также задача сопла Ловаля – является одним из основных направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных, которая интенсивно развивается с пятидесятых годов прошлого века.

Работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода, сравнительно мало. До сих пор остается неисследованной задача Пуанкаре-Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода, которой посвящена настоящая работа.

Анализ литературы. В конце прошлого века бурно развивались исследования по теории уравнений смешанного типа. Изучены краевые задачи Геллерстедта, Трикоми и много краевые задачи с различными нелокальными условиями для уравнений как параболо-гиперболического так и эллиптико-гиперболического типов. При доказательстве существования решения этих задач использованы, в основном, теория интегральных уравнений [1, 2]. В работе [3] исследована задача Трикоми для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода в обобщенном классе R_2. После появления этой работы для уравнений эллиптико-гиперболического типа изучены такие задачи как задача

Франкля, Бицадзе-Самарского и т.д. Во всех вышеперечисленных работах использовано непрерывное решение видоизменённой задачи Коши для уравнения гиперболического типа, полученое С.А. Терсеновым [4]. Однако в исследованных задачах, в основном, использовано представление решения Терсенова, с помощью которого не всегда удается доказать однозначную разрешимость многих краевых задач. Это способствовало рождению интереса у многих ученых этого направления к нахождению более удобного представления решения задачи Коши для гиперболического уравнение. В работе [5] опубликовано новое представление обобщенного решения видоизменённой задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода, которое позволило решить вышеперечисленных задач для уравнения смешанного типа второго рода [6, 7, 8]. В последнее время, благодаря полученному представлению обобщенного решения видоизменённой задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода, снимаются некоторые жёсткие условия в ранее проведенных исследованиях. В работе [9] изучена задача Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами. Новизна данной работы – в постановке задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, в котором существование решения исследуется впервые с помощью представления обобщенного решения видоизменённой задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода.

Цель статьи – исследовать однозначную разрешимость нелокальной краевой задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0, \tag{1}$$

в области $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 – ограничена кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB $(y = 0)$, а D_2 – при $y < 0$ ограничена тем же отрезком AB и характеристиками уравнения (1).

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$ – является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 – обобщенным решением из класса R_2 [6];

2) выполняется условие склеивание

$$-u_y(x,-0)=u_y(x,+0); \tag{2}$$

3) удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\{a(s)A_s[u]+b(s)u\}\big|_\sigma=\varphi(s), \quad 0<s<l; \tag{3}$$

$$D_{0x}^{1-\beta}u[\theta_0(x)]=c(x)u(x,0)+f(x), \qquad 0<x<1, \tag{4}$$

где $s-$ длина дуги σ, отсчитываемой от точки $B(1,0)$, $\theta_0(x)-$ точка пересечения характеристики уравнения (1), а $a(s), b(s)$, $\varphi(s)$, $c(x)$, $f(x)-$ заданные функции, причём

$$a(s)b(s)\geq 0, \quad 0\leq s\leq 1, \quad a(s), b(s), \ \varphi(s)\in C[0,l],$$

а $f(x)$ – может иметь особенность порядка меньше чем -2β, где $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$.

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии. Переходим к исследованию поставленной задачи.

Решение задачи в области D_1, удовлетворяющее условию (3) и $u\big|_{y=0}=t(x), \ (0\leq x\leq 1)$, имеет вид [3]:

$$u(x,y)=\int_0^1\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0,x,y)d\xi+\int_0^l\frac{\varphi(s)}{a(s)}G_2(\xi,\eta,x,y)ds, \tag{5}$$

где $G_2(\xi,\eta,x,y)-$ – функция Грина данной задачи в области D_1, а в области D_2, решая видоизмененную задачу Коши для гиперболического уравнения, получим обобщенное решение из класса R_2 [1]:

$$u(\xi,\eta)=\int_0^\xi(\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta}T(\zeta)d\zeta+\int_\xi^\eta(\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta}N(\zeta)d\zeta, \tag{6}$$

где

$$N(\zeta)=\frac{1}{2\pi\cos\pi\beta}T(\zeta)-\gamma_2\nu(\zeta), \tag{7}$$

$$\gamma_2=[2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

а $T(\zeta)$ определяется из следующего определения:

Определение. Функция $u(\xi,\eta)$, определённая формулой (6), называется обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) в области D_2 из класса R_2 [6], в котором $\tau(x)$ имеет вид:

$$\tau(x)=\int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)dt\ ,$$

где $\nu(x)$ и $T(x)$ – непрерывные и интегрируемые функции в интервале (0;1) и $T(x)$ – интегрируема на [0;1].

Из равенств (5) и (6) получаем следующие функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\begin{aligned}\nu(x)=\frac{k_2}{2\beta(2\beta-1)}\left[\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau'(t)}{(x-t)^{-2\beta}}dt+\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau'(t)}{(t-x)^{-2\beta}}dt\right]-\\ -k_2\int_0^1 \frac{\tau(t)dt}{(t+x-2xt)^{2-2\beta}}+\int_0^1 \tau(t)\frac{\partial^2 H_2(t,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dt+\\ +\int_0^l \chi(s)\frac{\partial q_2(\xi,\eta;x,0)}{\partial y}ds+\frac{k_2}{\beta(2\beta-1)}x^{2\beta}\tau'(0)\end{aligned} \qquad (8)$$

и

$$\begin{aligned}\tau'(x)=-2\beta\gamma_3\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}\nu(t)dt-\\ -2\beta\gamma_3\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}dt\int_0^t R(t,z)\nu(z)dz+F_0'(x),\end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$F_0(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta}t^{\beta}f(t)dt+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta}dt\int_0^t R(t,z)t^{\beta}f(z)dz,$$

а $R(t,z)$ – есть резольвента следующего интегрального уравнения

$$T(x)=\lambda_1\int_0^x K(x,t)T(t)dt+F(x),$$

где $K(x,t)=(x-t)^{-2\beta}x^{\beta}c(x)$, $F(x)=\dfrac{x^{\beta}f(x)}{\Gamma(1-\beta)}+\gamma_3\nu(x)$, $\lambda_1=\dfrac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}$, $\gamma_3=2\pi\gamma_2\cos\pi\beta$.

Существование решения задачи для уравнения (1) в силу (5) и (6) эквивалентно разрешимости системы (8) и (9). Подставляя (8) в (9) после некоторых вычислений, с учётом условие склеивание (2) и $x^{2\beta}\tau'(x)=\rho(x)$, получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши:

$$\rho(x)-\lambda\int_0^1\frac{\rho(t)}{t-x}dt=F(x),$$

где $\lambda=\dfrac{\cos\pi\beta}{\pi(1+\sin\pi\beta)}$.

Далее, применяя известный метод регуляризации Карлемана-Векуа [2], получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное поставленной задаче:

$$\tau'(x)=\frac{1}{2}\Phi_1(x)+$$
$$+\frac{\cos\pi\beta}{2\pi(1+\sin\pi\beta)}(1-x)^{-\frac{1}{4}(1-2\beta)}x^{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\beta}\int_0^1\frac{(1-t)^{-\frac{1}{4}(1-2\beta)}t^{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\beta\right)}}{t-x}\Phi_1(t)dt. \quad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения сформулированной задачи. Определив из уравнения (10) функцию $\tau'(x)$, находим функцию $\nu(x)$ из равенства (8). Далее, определяя функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, имея ввиду (4) и (7), по формулам (6) и (5) получим решение задачи соответственно в областях $D_2(y<0)$ и $D_1(y>0)$.

Выводы. Таким образом, согласно вышеприведенных ограничений на заданные функции, доказано существование решения рассматриваемой задачи.

Список литературы: **1.** *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа / *М.М. Смирнов*. – М.: Наука, 1970. – 270 с. **2.** *Салахитдинов М.С.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами / *М.С Салахитдинов, М. Мирсабуров*. – Ташкент: "Университет", 2005. – 224 с. **3.** *Кароль И.Л.* К теории уравнений смешанного типа

/ *И.Л. Кароль* // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – № 3. – С. 397-400. **4**. *Терсенов С.А.* К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения / *С.А. Терсенов* // Сиб. мат. журнал РАН. – 1961. – Т. 2. – № 6. – С. 931-935. **5.** *Мамадалиев Н.К.* О представлении, решения видоизмененной задачи Коши / *Н.К. Мамадалиев* // Сиб. мат. журнал РАН. – 2000. – Т. 41. – № 5. – С. 1087-1097. **6.** ***Mamadaliev N.K.*** Tricomi problem for strongly Degenarate Equations of Parabolic-Hyperbolic type / ***N.K. Mamadaliev*** // Mathematical Notss. – Curler Academic / Plenum-publishers. – 1999/2000. – Vol. 66. – № 3.– P. 310-315. **7.** ***Mamadaliev N.K.*** The Gellerstred Problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind / ***N.K. Mamadaliev*** // Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations. – 2007. – Vol. 1. – № 2. – P. 102-108. **8.** ***Salahitdinov M.S.*** Tricomi problem for the elliptic-hyperbolic equation of the second kind / ***M.S. Salahitdinov, N.K. Mamadaliev*** // The Journal of the Korean Mathematical Society (JKMS). – 2011. – Vol. 19. – №. 2. – P. 111-127. **9.** *Салахитдинов М.С.* Задача Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами / *М.С. Салахитдинов, Д. Аманов* // В сб. "Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей". – Ташкент: Фан, 1987. – С. 3-38. **10.** *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения / *М.С. Салахитдинов., Б.И. Исломов.* – Ташкент: "Мумтоз суз", 2010. – 264 с.

Поступила в редакцию 07.08.2013
После доработки 11.12.13

УДК 517.946

Про вирішення задачі Пуанкаре-Трікомі для рівняння змішаного типу другого роду / Мамадалієв Н.К., Абдулаєв А.А. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2013. – № 19 (992). – С. 81 – 86.

У даній роботі вперше доведено однозначне розв‘язання нелокальної краєвої задачі з умовою Пуанкаре для рівняння еліптіко-гіперболічного типа другого роду, тобто для рівняння, де лінія звироднiння є такою, що огинає сімейства характеристик і сама також є характеристикою. Єдиність рішення задачі доводиться методом інтегралів енергії, а існування – методом інтегральних рівнянь. Бібліогр.: 10 назв.

Ключові слова: нелокальна краєва задача, умови Пуанкаре, рівняння еліптіко-гіперболічного типу, рівняння змішаного типу другого роду.

UDC 517.946

About solubility of solution of the Poincare – Tricomi problem for the mixed type equation of the second kind / Mamadaliev N.K., Abdullayev A.A. / Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2013. – № 19 (992). – P. 81 – 86.

In the work is for the first time proved unambiguous solubility nonlocal boundary problem with Poincare condition for the elliptic-hyperbolical equation of the second kind for equation, where line of the degeneration is bending around family of the characteristic and itself also is a characteristic. Unique solution of the problem is proved by method integral to energy, and existence by method of the integral equations. Refs.: 10 titles.

Keywords: nonlocal boundary problem, condition Poincare, elliptic-hyperbolical equation of the second kind.