УДК 517.987.4

В.В. РОМАНЮК, канд. техн. наук, доц. ХНУ (м. Хмельницький)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ОДНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРАЛА НА НЕВІД'ЄМНІЙ ГРАНИЦІ ОДИНИЧНОЇ КУЛІ З НУЛЬОВИМ ЦЕНТРОМ

Поставлено задачу знаходження функціонального (континуального) інтегралу на невід'ємній границі кулі одиничного радіуса з центром у початку координат нормованого простору $\mathbb{L}_1[0; 1]$. Для чисельного методу його визначення побудовано інтегральну суму з відповідною нормою для диференціала точки досліджуваного підпростору простору $\mathbb{L}_1[0; 1]$.

Ключові слова: функціональний (континуальний) інтеграл, нормований простір $\mathbb{L}_n[0; 1]$, одинична куля з нульовим центром.

Постановка проблеми. Континуальне інтегрування займає одне з центральних місць у математичному апараті теоретичної фізики [1]. Уперше використані у квантовій механіці Р. Фейнманом у 1948 р., континуальні інтеграли (або, як їх ще називають, функціональні інтеграли) стали стрижнем для досліджень у квантовій фізиці [2], у квантовій теорії поля, а також в інших галузях. Наближене континуальне інтегрування є одним із найбільш перспективних засобів обчислень [3]. Функціональні інтеграли також знаходять своє місце у теорії керування, де у фазовому просторі розглядається результат від складання усіх траєкторій, по яким фазова точка могла б із початкового положення потрапити у кінцеве [4]. Але виявляється, що континуальний інтеграл може мати прикладне значення не тільки для квантової фізики чи теорії керування. Наприклад, в теорії антагоністичних ігор у роботі [5] згадується про задачу визначення глобального наслідку застосування гравцем його оптимальної стратегії, котра, зокрема, для першого гравця, полягає в обчисленні інтеграла

$$\int\limits_{q(y)\in\mathscr{Y}} \left(\int\limits_{x\in X} \int\limits_{y\in Y} K(x, y)\, p(x) q(y)\, dx dy \right) d\left[q(y) \right] =$$

$$= \int\limits_{q(y)\in\mathscr{Y}} v\left[p(x), q(y) \right] d\left[q(y) \right] \tag{1}$$

по множині $\mathscr{Y}$ усіх змішаних стратегій другого гравця, кожен елемент $q(y)$ якої ми, не обмежуючи загальності, ототожнюємо зі щільністю розподілу імовірностей на борелевій підмножині $Y \subset \mathbb{R}$ ненульової міри:

$$\int\limits_{y\in Y} q(y)\,dy = 1\,, \quad \int\limits_{x\in X} p(x)\,dx = 1\,. \tag{2}$$

Звичайно, в (1) і (2) $x \in X$ та $y \in Y$ є чистими стратегіями першого і другого гравців відповідно, $p(x)$ є щільністю розподілу імовірностей на X, де $X \subset \mathbb{R}$ є борелевою підмножиною ненульової міри, а поверхня $K(x, y)$ є ядром антагоністичної гри. Підінтегральна функція $v[p(x), q(y)]$ є математичним сподіванням виграшу першого гравця у ситуації у змішаних стратегіях $\{p(x), q(y)\}$. Знання інтегралу (1) може бути корисним при порівнянні глобальних наслідків використання першим гравцем двох його різних оптимальних стратегій [5].

Аналіз досліджень і публікацій по континуальному інтегруванню. Окремі види континуального інтеграла можуть знаходитись як аналітично, так і чисельно [6]. Аналітичні методи обчислення континуальних інтегралів розглянуті у [1, 4, 7], але там досліджується окремий клас функціональних інтегралів по мірі Вінера, по мірі Гауса, а також по умовній мірі Вінера з вагою. Чисельні методи, запропоновані у [1, 2], дозволяють брати широкий клас континуальних інтегралів, але всі вони так чи інакше пов'язані з імовірнісними мірами, множина яких задається на деяких кореляційних властивостях. Одним з найбільш відомих шляхів обчислення функціонального інтеграла у квантовій фізиці, котрий являє собою також і регуляризацію для усунення розбіжностей, є уведення просторово-часової решітки [2]. Цей прийом дозволяє замінити знаходження континуальних інтегралів обчисленням звичайних ріманових інтегралів високої кратності, для чого зазвичай використовується метод Монте-Карло. Але надзвичайно високі витрати машинного часу для виконання таких обчислень зумовлюють розвиток непертурбативної регуляризації каліброваної квантової теорії на континуальному рівні і проведення досліджень безпосередньо на континуальному рівні [2, 3]. Одним з перспективних підходів є побудова наближених формул, які є точними на заданому класі функціоналів. У рамках цього підходу авторами робіт [2, 3] для континуальних інтегралів по гаусовим мірам були побудовані нові наближені формули, котрі виявились точними на класі функціональних багаточленів довільного степеня. Отримані формули у частинному випадку умовної міри Вінера у роботах [2, 8] були використані для обчислення деяких величин в евклідовій квантовій механіці за допомогою наближеного обчислення інтегралів Фейнмана без дискретизації часу, де квадратурні формули дали суттєву економію машинного часу та необхідну точність. У [2] отримані наближені формули для кратних континуальних інтегралів по умовній мірі Вінера з вагою, досліджена міра континуального інтегрування у двомірній евклідовій квантовій теорії поля з поліноміальними взаємодіями бозонних полів. У нашому ж випадку з інтегралом (1) необхідно брати функціональний інтеграл виду

$$\int\limits_{\rho(t)\in \boldsymbol{P}} \left(\int\limits_{t\in T} \varphi\left[\rho(t),\, t\right] dt \right) d\left[\rho(t)\right] \tag{3}$$

на множині

$$\boldsymbol{P} = \left\{ \rho(t) \in \mathbb{L}_1(T) : \rho(t) \geqslant 0 \;\forall\, t \in T \subset \mathbb{R},\; \int\limits_{t\in T} \rho(t)\, dt = 1 \right\} \tag{4}$$

усіх можливих щільностей розподілів, котрі задаються на борелевій підмножині $T \subset \mathbb{R}$ ненульової міри. Ця множина є обмеженою у просторі $\mathbb{L}_1(T)$ і, більш того, (4) є границею невід’ємної одиничної кулі $\mathbb{B}[0,\, 1]$ з центром у нулі $\rho(t) = 0 \quad \forall\, t \in T \subset \mathbb{R}$ й одиничним радіусом. Також припускатимемо, що функція $\varphi\left[\rho(t),\, t\right]$ є інтегровною на $T \subset \mathbb{R}$ у смислі метрики простору $\mathbb{L}_2(T)$.

Формулювання мети і постановка завдань статті. Не обмежуючи загальності, надалі покладатимемо підмножину $T = [0;\, 1]$. На цьому одиничному сегменті треба знайти підінтегральний функціонал

$$\int\limits_0^1 \varphi\left[\rho(t),\, t\right] dt \tag{5}$$

при

$$\int\limits_0^1 \left(\varphi\left[\rho(t),\, t\right] \right)^2 dt < \infty\,. \tag{6}$$

Для того, щоб знаходити інтеграл (3), необхідно спочатку для нього записати відповідну інтегральну суму. Для цього потрібно визначитись із диференціалом $d\left[\rho(t)\right]$ та множиною (4) під знаком граничного переходу. Далі необхідно обґрунтувати метод обчислення цієї інтегральної суми, визначивши таким чином чисельний метод знаходження функціонального інтеграла типу (3) при кожному $\rho(t) \in \boldsymbol{P} \subset \mathbb{B}[0,\, 1] \subset \mathbb{L}_1[0;\, 1]$.

Чисельне інтегрування функціонала-інтегранта. Вибираємо точки $t_i \in [0;\, 1]$ для $i = \overline{0,\, N}$ так, що $t_i - t_{i-1} = \dfrac{1}{N} \quad \forall\, i = \overline{1,\, N}$. Таким чином виконуємо розбиття одиничного сегменту $T = [0;\, 1]$ на сегменти

$$\left\{ [t_{i-1};\, t_i] \right\}_{i=1}^{N} = \left\{ \left[\frac{i-1}{N};\, \frac{i}{N} \right] \right\}_{i=1}^{N}. \tag{7}$$

Тоді інтеграл (5) наближено обчислюватимемо так:

$$\int_0^1 \varphi\left[\rho(t), t\right]dt \approx \sum_{i=1}^{N} \varphi\left[\rho(t_i), t_i\right](t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi\left[\rho(t_i), t_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi\left[\rho\left(\frac{i}{N}\right), \frac{i}{N}\right]. \tag{8}$$

Співвідношення (8) надалі буде покладено в чисельний метод знаходження функціонального інтеграла типу (3).

Визначення диференціала $d\left[\rho(t)\right]$**.** Як для першого наближення, спочатку природно покладемо, що

$$d\left[\rho(t)\right] = \lim_{\substack{\Delta\rho(t)\geqslant 0\ \forall\, t\in[0;\,1] \\ \Delta\rho(t)\to 0\ \forall\, t\in[0;\,1]}} \left\|\rho(t) - \left[\rho(t) + \Delta\rho(t)\right]\right\| = \lim_{\substack{\Delta\rho(t)\geqslant 0\ \forall\, t\in[0;\,1] \\ \Delta\rho(t)\to 0\ \forall\, t\in[0;\,1]}} \left\|\Delta\rho(t)\right\|, \tag{9}$$

де функція $\Delta\rho(t)$ є деяким приростом точки $\rho(t)$ у просторі

$$\boldsymbol{P} = \left\{\rho(t) \in \mathbb{L}_1[0;\,1] : \rho(t) \geqslant 0\ \forall\, t \in [0;\,1],\ \int_0^1 \rho(t)dt = 1\right\}, \tag{10}$$

і при цьому функція $\rho(t) + \Delta\rho(t)$ залишається у просторі (10):

$$\int_0^1 \left[\rho(t) + \Delta\rho(t)\right]dt = 1. \tag{11}$$

Тут нам слід виконати скінченне розбиття простору (10) на кусково-неперервні сходинкові функції, котрі є неперервними зліва і кожна з яких задана N значеннями на N напівінтервалах $\left\{\left(\frac{i-1}{N};\, \frac{i}{N}\right]\right\}_{i=1}^{N}$. Щодо розбиття по вісі ординат, то розмірковуватимемо наступним чином. Нехай по вісі ординат функція $\rho(t)$ має M рівнів квантування. Тоді, по-перше, кожна повністю квантована функція $\rho(t)$ представлятиметься у формі $M \times N$-матриці зі значеннями 0 й 1, де сума елементів i-го стовпчика, поділена на відношення суми усіх елементів цієї матриці до N, буде дорівнювати значенню функції $\rho(t)$ на напівінтервалі $\left(\frac{i-1}{N};\, \frac{i}{N}\right]$. По-друге, для того, щоб скласти скінченне розбиття множини (10), треба його спершу упорядкувати.

Нехай скінченне розбиття множини (10) містить J елементів – квантованих функцій $\rho(t)$. Після упорядкування цих квантованих функцій перший елемент може мати, зокрема, найменшу норму, а останній –

найбільшу. Очевидно, що тут не можна брати норму простору $\mathbb{L}_1[0;1]$, оскільки у ньому всі елементи розбиття множини (10) мають одиничну норму. Тоді прийдеться узяти норму простору $\mathbb{L}_2[0;1]$. Але у цьому просторі виникає ще одна складність. Справа у тому, що якщо мова йде про одиничну імовірність (чисту стратегію одного з гравців в антагоністичній грі) при $t=h$, то $\rho(t)=\delta(t-h)$, причому інтеграл $\int\limits_0^1 \delta^2(t-h)dt$ не існує, адже це можна показати наступним чином. Якщо $\delta(t-h)\approx N \quad \forall\, t\in\left[h;\, h+\frac{1}{N}\right]\subset[0;1]$, то

$$\int\limits_0^1 \delta^2(t-h)dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}N^2 = \lim_{N\to\infty} N = \infty\,. \tag{12}$$

Тому за норму візьмемо таку функцію:

$$\|\rho(t)\| = \frac{\sqrt{\int\limits_0^1 \rho^2(t)dt}}{\max\limits_{\rho(t)\in \boldsymbol{P}\subset\mathbb{B}[0,1]\subset\mathbb{L}_2[0;1]}\sqrt{\int\limits_0^1 \rho^2(t)dt}} = \frac{\sqrt{\int\limits_0^1 \rho^2(t)dt}}{\sqrt{\int\limits_0^1 \delta^2(t)dt}}\,, \tag{13}$$

яка є відношенням норми функції $\rho(t)$ у просторі $\mathbb{L}_2[0;1]$ до максимальної норми цієї функції у цьому ж просторі. Далі має місце таке твердження.

Теорема 1. Норма (13) у просторі функцій (10) задовольняє нерівності

$$0\leqslant\|\rho(t)\|\leqslant 1\,, \tag{14}$$

причому мінімум

$$\min_{\rho(t)\in \boldsymbol{P}\subset\mathbb{B}[0,1]\subset\mathbb{L}_2[0;1]}\|\rho(t)\| = 0 \tag{15}$$

досягається на рівноімовірних розподілах, а максимум

$$\max_{\rho(t)\in \boldsymbol{P}\subset\mathbb{B}[0,1]\subset\mathbb{L}_2[0;1]}\|\rho(t)\| = 1 \tag{16}$$

досягається на розподілах з одиничною імовірністю.

Доведення. Для рівноімовірного розподілу буде $\rho(t)=\rho_0(t)=1$ $\forall\, t\in[0;1]$. Це означає, взагалі кажучи, що його норма у просторі $\mathbb{L}_n[0;1]$

$$\left(\int\limits_0^1 |\rho_0(t)|^n\,dt\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\int\limits_0^1 |1|^n\,dt\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\int\limits_0^1 dt\right)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall\, n\geqslant 1\,, \tag{17}$$

звідки

$$\left\|\rho_0(t)\right\| = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \delta^2(t)\,dt}} = 0\,, \tag{18}$$

де використано (12), є аргументом мінімуму (15). Для розподілу з одиничною імовірністю буде $\rho(t) = \delta(t-h)$ при $h \in [0;1]$. Тоді максимум (16) досягається саме на таких розподілах, що доводить нерівність (14) і теорему загалом.

Отже, якщо (13) є нормою для сортування $\left\{\rho_j(t)\right\}_{j=1}^{J}$ елементів скінченного розбиття множини (10) за зростанням норми, то $\left\|\rho_{j-1}(t)\right\| \leqslant \left\|\rho_j(t)\right\|$ $\forall\ j = \overline{2, J}$. Тоді замість припущеної раніше форми функціонального диференціала (9) використаємо іншу, зі звичайною нормою підпростору $[0;1] \subset \mathbb{R}$ числової прямої під знаком границі та внутрішньою нормою (13) упорядкування скінченного розбиття множини (10):

$$d\left[\rho(t)\right] = \lim_{\substack{\Delta\rho(t)\geqslant 0\ \forall\, t\in[0;1] \\ \Delta\rho(t)\to 0\ \forall\, t\in[0;1]}} \left|\left(\left\|\rho(t)\right\| - \left\|\rho(t)+\Delta\rho(t)\right\|\right)\right| =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta\rho(t)\geqslant 0\ \forall\, t\in[0;1] \\ \Delta\rho(t)\to 0\ \forall\, t\in[0;1]}} \frac{\left|\sqrt{\int_0^1 \rho^2(t)\,dt} - \sqrt{\int_0^1 \left[\rho(t)+\Delta\rho(t)\right]^2 dt}\right|}{\sqrt{\int_0^1 \delta^2(t)\,dt}} \tag{19}$$

при справедливості (11). Звідси випливає наступне твердження.

Теорема 2. Інтеграл

$$\int_{\rho(t)\in \boldsymbol{P}} d\left[\rho(t)\right] = 1 \tag{20}$$

із диференціалом (19), де множиною інтегрування є (10).

Доведення. Оскільки виконана нерівність (14), то звичайна лебегівська міра множини упорядкованих норм (13) дорівнює одиниці. Нескінченно малі (19) у сумі (20) будуються саме за такою мірою, тому їх сума повинна дорівнювати одиниці. Теорему доведено.

Інтегральна сума для функціонального інтеграла типу (3) на множині (10). Визначимо наближено норму функції $\rho_j(t)$ у просторі $\mathbb{L}_2[0;1]$ наступним чином:

$$\left\|\rho_j(t)\right\| = \sqrt{\int_0^1 \rho_j^2(t)\,dt} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_j(t_i)-\rho_j(t_{i-1})\right]^2 (t_i - t_{i-1})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right)-\rho_j\left(\frac{i-1}{N}\right)\right]^2}\,. \qquad (21)$$

Тепер інтеграл (3) легко записати через його інтегральну суму, у якій інтегрування функціонала-інтегранта здійснюватиметься за (8), а диференціювання змінної інтегрування $\rho(t)$ відповідатиме (19) з відсортованими нормами $\left\{\left\|\rho_j(t)\right\|\right\}_{j=1}^{J}$ елементів скінченного розбиття множини (10):

$$\int_{\rho(t)\in\boldsymbol{R}}\left(\int_{t\in T}\varphi\left[\rho(t),\, t\right]dt\right)d\left[\rho(t)\right] \approx \int_{\rho(t)\in\boldsymbol{R}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi\left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right),\, \frac{i}{N}\right]\right)d\left[\rho(t)\right] \approx$$

$$\approx \sum_{j=2}^{J}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi\left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right),\, \frac{i}{N}\right]\right)\times$$

$$\times\frac{\left|\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_{j-1}(t_i)-\rho_{j-1}(t_{i-1})\right]^2} - \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_j(t_i)-\rho_j(t_{i-1})\right]^2}\right|}{\sqrt{N}} =$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{j=2}^{J}\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi\left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right),\, \frac{i}{N}\right]\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right)-\rho_j\left(\frac{i-1}{N}\right)\right]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_{j-1}\left(\frac{i}{N}\right)-\rho_{j-1}\left(\frac{i-1}{N}\right)\right]^2}\right). \qquad (22)$$

Звісно ж, модуль у (22) опущено завдяки нерівності $\left\|\rho_{j-1}(t)\right\| \leqslant \left\|\rho_j(t)\right\|$ $\forall\ j = \overline{2,\, J}$.

Висновок та перспектива подальшого дослідження. Функціональний інтеграл виду (3) є корисним для оцінювання глобального наслідку використання стратегії гравцем в антагоністичній грі. При покладанні норми (13) та диференціала (19) цей інтеграл може бути наближено обчислений як (22). При цьому вклад невраховуваної складової зі значенням $\rho(0)$ буде "з'їдатися" інтегруванням на множині нульової міри. Похибка обчислень, згідно з (12) і (18), є пропорційною величині $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Тоді, зокрема, значення інтегралу (20) буде не таким, а дорівнюватиме $1-\frac{1}{\sqrt{N}}$. Тому при наближеному інтегруванні (3) по множині (10) слід брати доволі велике число N сегментів (7). Звідси перспектива подальшого дослідження якраз і полягає в удосконаленні та адаптації розробленого чисельного методу функціонального інтегрування до негроміздких за об'ємом просторово-часових решіток, тобто метою продовження дослідження є вироблення менш невимогливого чисельного методу до великого числа N сегментів (7).

Список літератури: **1.** *Березин Ф.А.* Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве / *Ф.А. Березин* // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 132. – Вып. 3. – С. 497 – 548. **2.** *Жидков Е.П.* Об одном методе вычисления континуальных интегралов без решёточной дискретизации / *Е.П. Жидков, Ю.Ю. Лобанов, Р.Р. Шахбагян* // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1. – № 8. – С. 139 – 157. **3.** *Жидков Е.П.* Приближённое вычисление кратных континуальных интегралов в многомерных задачах квантовой физики / *Е.П. Жидков, Ю.Ю. Лобанов, Р.Р. Шахбагян* // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2. – № 10. – С. 110 – 119. **4.** *Далецкий Ю.Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / *Ю.Л. Далецкий* // Успехи математических наук. – 1962. – Т. XVII. – Вып. 5 (107). – С. 3 – 115. **5.** *Романюк В.В.* Оцінювання глобального і локальних наслідків застосування гравцем оптимальної стратегії в антагоністичних іграх при чистій оптимальній стратегії в іншого гравця / *В.В. Романюк* // Вісник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки. – 2009. – № 2. – С. 431 – 436. **6.** Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие / *Иванов В.В.* – К.: Наук. думка, 1986. – 584 с. **7.** *Ладохин В.И.* Вычисление континуальных интегралов от функционалов $\Phi\left[\int_0^T \alpha_1(\tau)dx(\tau); \ldots; \int_0^T \alpha_m(\tau)dx(\tau)\right]$ / *В.И. Ладохин* // Успехи математических наук. – 1964. – Т. XIX. – Вып. 1 (115). – С. 155 – 159. **8.** *Gregus M.* On the deterministic computation of functional integrals in application to quantum mechanical problems / *M. Gregus, Yu.Yu. Lobanov, O.V. Sidorova, E.P. Zhidkov* // J. Comp. Appl. Math. – 1987. – V. 20. – P. 247 – 256.

Стаття представлена д.т.н., проф. Національної академії державної прикордонної служби України імені Б. Хмельницького Катеринчуком І. С.

УДК 517.987.4

Численный метод нахождения одного обобщённого функционального интеграла на неотрицательной границе единичного шара с нулевым центром / В.В. Романюк // Вестник НТУ "ХПИ". Тематический выпуск: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2010. – № 31. – С. 153 – 161.

Поставлена задача нахождения функционального (континуального) интеграла на неотрицательной границе шара единичного радиуса с центром в начале координат нормированного пространства $\mathbb{L}_1[0; 1]$. Для численного метода его приближённого определения построена интегральная сумма с соответствующей нормой для дифференциала точки исследуемого подпространства пространства $\mathbb{L}_1[0; 1]$. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: функциональный (континуальный) интеграл, нормированное пространство $\mathbb{L}_n[0; 1]$, шар единичного радиуса с центром в начале координат.

UDC 517.987.4

Numerical method for finding a generalized functional integral on nonnegative boundary of the unit ball with zero center / V.V. Romanuke // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2010. – №. 31. – P. 153 – 161.

The task of finding of functional (continual) integral is put on the non-negative border of ball of single radius with a center at the beginning of co-ordinates of the rationed space $\mathbb{L}_1[0;1]$. For the numeral method of his close determination an integral sum is built with the proper norm for the differential of point of the probed subspace of space $\mathbb{L}_1[0;1]$. Refs: 8 titles.

Key words: functional (continual) integral, rationed space $\mathbb{L}_n[0;1]$, ball of single radius with a center at the beginning of co-ordinates.

Поступила в редакцию 23.05.2010