УДК 62-50

В.Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПИ" (г. Харьков),
В.И. НОСКОВ, канд. техн. наук, гл. инженер ООО "Преобразователь" (г. Запорожье),
Н.В. МЕЗЕНЦЕВ, ст. преподаватель НТУ "ХПИ" (г. Харьков)

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДОМ АКОР А.А. КРАСОВСКОГО ПРИ НЕЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИХ УПРАВЛЕНИЯХ И СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Предлагается новая модификация метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы А.А. Красовского для случая нелинейного вхождения управлений в систему уравнений, описывающую объект, а также при наличии случайных возмущающих воздействий.

Ключевые слова: метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы, случайные возмущающие воздействия.

Постановка проблемы и анализ литературы. Метод аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы (АКОР), разработанный А.А. Красовским, позволяет выполнять синтез регуляторов для объектов, описываемых системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка [1 – 3], чем он выгодно отличается от многих других методов синтеза оптимальных регуляторов [4 – 7]. При этом математическая модель объекта управления в самом общем случае имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} + f_i(x_1,\dots,x_n,t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x_1,\dots,x_n,t)u_j + $$
$$+ \sum_{k=1}^{r} \eta_{ik}(x_1,\dots,x_n,t)\xi(t), \qquad (1)$$

где $x_i\,(i=\overline{1,n})$ – фазовые координаты объекта управления; $f_i, \varphi_{ij}, \eta_{ik}$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,r}$) – непрерывные функции, описывающие объект управления; $\xi_k(t)$ – белые шумы (последовательности статистически независимых δ-импульсов, случайных по площади и разделенные сколь угодно малыми, но конечными промежутками времени); $u_j\,(j=\overline{1,m})$ – управления, определяемые из условия минимума функционала

$$J = M\left[V_3\left(x_1(t_2),\dots,x_n(t_2),\, t_2\right)\right] + M\left[\int_{t_1}^{t_2} Q\left(x_1,\dots x_n,t\right)dt\right] +$$

$$+\frac{1}{p}M\left[\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_j}{k_j}\right)^q dt\right]+\frac{1}{q}M\left[\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(k_j\sum_{l=1}^{n}\varphi_{lj}\frac{\partial V}{\partial x_l}\right)^p dt\right]. \qquad (2)$$

Здесь M – символ математического ожидания; $V_з, Q$ – заданные непрерывные функции; p, q – положительные четные числа, удовлетворяющие условию $1/p+1/q=1$; $k_j\,(j=\overline{1,m})$ – положительные коэффициенты; V – функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i=-Q \qquad (3)$$

при граничном условии

$$V(t=t_2)=V_з. \qquad (4)$$

Управления u_j, определяемые из условия минимума функционала обобщенной работы (2), являются оптимальными как для случая объекта (1), так и для случая детерминированного объекта ($\xi_k(t)\equiv 0,\ k=\overline{1,r}$). Это свойство определяемых управлений и возможность синтеза регуляторов для объектов, описываемых системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, является несомненным достоинством метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы. Однако линейное вхождение управлений в систему дифференциальных уравнений объекта (1) является определенным ограничением для применения рассматриваемого метода аналитического конструирования регуляторов. Известные способы преобразования математических моделей с нелинейно входящими управлениями к моделям с линейно входящими управлениями не всегда помогают, поскольку такие преобразования часто ухудшают качество синтезируемых систем управления. В связи с этим были разработаны методы синтеза регуляторов по критерию обобщенной работы для различных математических описаний объектов с нелинейно входящими управлениями [8 – 11]. Однако во всех указанных работах синтез регуляторов рассматривался в условиях отсутствия случайных возмущений.

Целью статьи является расширение области применения метода аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы на объекты, описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейно входящими управлениями и при наличии случайных возмущающих воздействий.

Исследования и результаты. В работе [11] доказана одна из наиболее общих теорем аналитического конструирования регуляторов по критерию обобщенной работы с нелинейно входящими управлениями для случая $p = q = 2$.

Теорема 1. Пусть объект описывается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} + f_i(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x_1, \dots, x_n, t)\psi_{ij}^1(u_{1ij})\psi_{ij}^2(u_{2ij}), \tag{5}$$

тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$I = V_3[x_1(t_2), \dots, x_n(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} Q dt + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt \tag{6}$$

являются управления

$$\begin{aligned} u_{1ij} &= -k_{1ij}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2/2u_{1ij}; \\ u_{2ij} &= -k_{2ij}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2/2u_{2ij}, \end{aligned} \tag{7}$$

где V – решение уравнения (3) при граничном условии (4); ψ_{ij}^1, ψ_{ij}^2 ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) – непрерывные функции от управлений, соответственно u_{1ij} и u_{2ij}.

Обобщим эту теорему на случай, когда объект управления будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} + f_i(x_1, \dots, x_n, t) &= \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x_1, \dots, x_n, t)\psi_{ij}^1(u_{1ij})\psi_{ij}^2(u_{2ij}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{r} \eta_{ik}(x_1, \dots, x_n, t)\xi_k(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Теорема 2. Пусть объект описывается системой уравнений (8), тогда оптимальными в смысле минимума функционала

$$\begin{aligned} I &= M\left[V_3(x_1(t_2), \dots, x_n(t_2), t_2)\right] + M\left[\int_{t_1}^{t_2} Q(x_1, \dots, x_n, t)dt\right] + \\ &+ M\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt\right] \end{aligned} \tag{9}$$

являются управления (7), в которых V есть решение уравнения (3) при граничном условии (4).

Доказательство.

Полная производная функции V в силу уравнений объекта (8) и уравнения в частных производных (3) равна

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\psi_{ij}^{1}\psi_{ij}^{2}+\sum_{k=1}^{r}\eta_{ik}\xi_k(t)-f_i\right)=$$
$$=-Q+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{\mathrm{m}}\varphi_{ij}\psi_{ij}^{1}\psi_{ij}^{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{r}\eta_{ik}\xi_k(t)\,. \tag{10}$$

Интегрируя выражение (10) в интервале времени $[t_1, t_2]$, получим

$$V\big[x_1(t_2),\ldots,x_n(t_2),t_2\big]-V\big[x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1),t_1\big]=-\int_{t_1}^{t_2}Qdt+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^{1}\psi_{ij}^{2}dt+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial x_i}\eta_{ik}\xi_k(t)dt\,. \tag{11}$$

Учитывая, что по условию $V\big[x_1(t_2),\ldots,x_n(t_2),t_2\big]=V_з\big[x_1(t_2),\ldots,x_n(t_2),t_2\big]$, из (11) можно получить

$$M\big[V_з\big(x_1(t_2),\ldots,x_n(t_2),t_2\big)\big]+M\left[\int_{t_1}^{t_2}Qdt\right]=M\big[V\big(x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1),t_1\big)\big]+$$
$$+M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^{1}\psi_{ij}^{2}dt\right]+M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial x_i}\eta_{ik}\xi_k(t)dt\right]. \tag{12}$$

Покажем, используя методику А.А. Красовского [1], что последний член в выражении (12) не зависит от управлений (7). Учитывая принятую модель белых шумов в уравнениях (1) и (8), можно записать

$$\xi_k(t)=\sum_{d}B_{kd}\delta(t-\tau_d)\,, \tag{13}$$

где $\xi_k(t)$ – обобщенный стационарный случайный процесс; B_{kd} – независимые случайные центрированные величины; $\tau_1,\tau_2,\ldots$ – случайные моменты времени, которым соответствуют "импульсы" δ-функции.

Согласно соотношению (13) последний член выражения (12) можно преобразовать к виду

$$R=M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d}\left(B_{kd}\int_{\tau_d-0}^{\tau_d+0}\frac{\partial V}{\partial x_i}\eta_{ik}\delta(t-\tau_d)dt\right)\right]. \tag{14}$$

Вследствие воздействия δ-функций $\delta(t-\tau_d)$ ($d = const$) фазовые координаты объекта управления (8) за интервал времени от $\tau_d - 0$ до $\tau_d + 0$ получают приращения

$$\Delta x_{id} = \int\limits_{\tau_d - 0}^{\tau_d + 0} \eta_{ik} B_{kd} \delta(t-\tau_d)dt, \qquad i = \overline{1,n}\,.$$

С точностью до бесконечно малых более высокого порядка приращения Δx_{id} не зависят от управлений u_{1ij} и u_{2ij} ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$). Таким образом, изменения фазовых координат, вызванные воздействием возмущений в виде δ-функций, с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка не зависят от управлений u_{1ij} и u_{2ij}, а это значит, что и возмущения функций $V\left[x_1, \ldots, x_n, t\right]$, $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, $\eta_{ik}\left[x_1, \ldots, x_n, t\right]$ ($i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$), вызванные воздействием возмущений в виде δ-функций с точностью до бесконечно малых более высокого порядка не зависят от управлений u_{1ij} и u_{2ij} ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$). Поэтому и R с точностью до бесконечно малых величин не зависит от управлений.

Функционал (9) с учетом выражений (12) и (14) преобразуем к виду

$$I = M\left[V(x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1), t_1)\right] + M\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2 dt\right] +$$
$$+ M\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right)dt\right] + R\,. \tag{15}$$

Поскольку выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2 / 2u_{1ij}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2 + \frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2}\right] =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{u_{1ij}^2}{k_{1ij}^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2 / 2u_{2ij}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2 + \frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2}\right] =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{u_{2ij}^2}{k_{2ij}^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2\ ,$$

то функционал (15) можно записать в виде

$$I = M\left[V(x_1(t_1),\ \ldots,\ x_n(t_1),\ t_1)\right] +$$
$$+ M\left[\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{1ij}}{k_{1ij}} + k_{1ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2/2u_{1ij}\right)^2 dt\right] + \tag{16}$$
$$+ M\left[\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{u_{2ij}}{k_{2ij}} + k_{2ij}\frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_{ij}\psi_{ij}^1\psi_{ij}^2/2u_{2ij}\right)^2 dt\right] + R\,.$$

Если управления u_{1ij} и u_{2ij} определяются соотношениями (7), то подинтегральные выражения в функционале (16) обращаются в нуль и он принимает минимальное значение. Таким образом, управления (7) действительно являются оптимальными в смысле минимума функционала (9) и, следовательно, теорема 2 доказана.

Заметим, что вид оптимальных управлений (7) при случайных возмущениях описанного типа одинаков для детерминированных и стохастических систем. При этом величины управлений как и в наиболее общих теоремах по аналитическому конструированию регуляторов по критерию обобщенной работы А.А. Красовского [1] не зависят от уровня шумов.

Из общих уравнений (5), (8) объекта управления и его управлений (7) могут быть получены различные частные системы уравнений, важные для различных областей применения. В качестве примера рассмотрим задачу синтеза системы управления асинхронным приводом, математическая модель которого в осях U и V может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\psi_1}{dt} + a_{11}\psi_1 + a_{13}\psi_3 = A\cos\omega t;\\
&\frac{d\psi_2}{dt} + a_{22}\psi_2 + a_{24}\psi_4 = A\sin\omega t;\\
&\frac{d\psi_3}{dt} + a_{31}\psi_1 + a_{33}\psi_3 + a_{345}\psi_4\Omega = 0;\\
&\frac{d\psi_4}{dt} + a_{42}\psi_2 + a_{44}\psi_4 + a_{435}\psi_3\Omega = 0;\\
&\frac{d\Omega}{dt} - \frac{P}{J}\left(a_{50}\left(\psi_2\psi_3 - \psi_1\psi_4\right)\right) - M_c(\Omega) - \sum_{k=1}^{r}\eta_k\xi_k(t) = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

где ψ_1, ψ_2 – потокосцепления по оси *U*; t – время; $a_{11}, a_{13}, a_{22}, \ldots, a_{50}$ – постоянные коэффициенты; A – амплитуда (первое управление) питающего напряжения частоты ω (второе управление); ψ_3, ψ_4 – потокосцепления по оси *V*; Ω – угловая скорость вращения ротора электродвигателя; P – число пар полюсов двигателя; J – момент инерции двигателя и механизма, приведенный к валу двигателя; M_c – момент сопротивления нагрузки; η_k – характеристики объекта (постоянные коэффициенты или непрерывные функции); $\xi_k(t)$ – белые шумы.

Используя соотношения (7) и систему уравнений объекта (17), несложно получить выражения для управляющих воздействий

$$A = -\frac{k_1^2}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\cos\omega t + \frac{\partial V}{\partial x_2}\sin\omega t\right); \qquad (18)$$

$$\omega = -\frac{Ak_2^2}{2\omega}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\cos\omega t + \frac{\partial V}{\partial x_2}\sin\omega t\right). \qquad (19)$$

Из соотношений (18), (19) находим

$$\frac{A}{\omega} = \frac{k_1}{k_2} = const,$$

т.е. имеем известный закон при частотном управлении: отношение амплитуды сигнала к его частоте равно константе.

Выводы. Таким образом, доказательство теоремы 2 расширило область возможного применения метода АКОР на объекты, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида (8), т.е. на объекты с нелинейно входящими управлениями и при наличии случайных возмущающих воздействий. В дальнейшем предполагается обобщение полученных результатов и разработка численных методов для синтеза конкретных систем управления.

Список литературы: **1.** *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 560 с. **2.** *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. – М.: Наука, 1977. – 272 с. **3.** Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *Красовского А.А.* – М.: Наука, 1987. – 712 с. **4.** *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с. **5.** *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004. – 832 с. **6.** Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5-ти томах. Т.4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Е.Д. Егунова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. **7.** Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез, оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Е.Д. Егунова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632 с. **8.** Эволюционные методы компьютерного моделирования / *Верлань А.Ф., Дмитриенко В.Д., Корсунов Н.И.,* *Шорох В.А.* – К.: Наук. думка, 1992. – 256 с. **9.** *Носков В.И., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И., Леонов С.Ю.* Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов. – Харьков: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. **10.** *Даниленко А.Ф., Дмитриенко В.Д., Заполовский Н.И.* Математические модели оптимальных систем управления тяговым асинхронным приводом тепловозов // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13. – № 2. – С. 40 – 44. **11.** *Дмитриенко В.Д., Носков В.И. Мезенцев Н.В.* Оптимизация функционала обобщенной работы при нелинейно входящих управлениях. Праці Луганського відділення Міжнародної Академії Автоматизації. – Луганськ: Луганське відділення Міжнародної Академії Автоматизації. – 2005. № 1. – С. 17 – 22.

УДК 62-50

Синтез регуляторів методом АКУР О.А. Красовського при управліннях, що нелінійно входять, та випадкових впливах, що збурюють / Дмитрієнко В.Д., Носков В.І., Мезенцев М.В. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2009. – № 13. – С. 53 – 60.

Пропонується нова модифікація методу аналітичного конструювання регуляторів за критерієм узагальненої роботи О.А. Красовського для випадку нелінійного входження управлінь у систему диференціальних рівнянь, що описують об'єкт, а також при наявності випадкових впливів, що збурюють. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: метод аналітичного конструювання за критерієм узагальненої роботи, випадкові впливи, що збурюють

UDC 62-50

Synthesis of regulators method of AKOR of A.A. Krasovski at nonlinear incoming controls and casual revolting influences / Dmitrienko B.D., Noskov V.I., Mezentsev N.V. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2009. – № 13. – P. 53 – 60.

New modification of method of the analytical constructing of regulators is offered on the criterion of the generalized work of A.A. Krasovski for the case of the nonlinear including of controls in the system of equalizations, describing an object, and also at presence of casual revolting influences. Refs.: 11 titles.

Key words: method of the analytical constructing of regulators on the criterion of the generalized work, casual revolting influences.

Поступила в редакцию 25.05.2009