УДК 681.325

В.Г. ИВАНОВ, канд. техн. наук, зав. кафедрой информатики и вычислительной техники НЮАУ им. Я. Мудрого (г. Харьков)

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ И НА ПЛОСКОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

У роботі досліджується можливість розвитку математичних методів швидких перетворень Хаара з метою застосування їх на площині сигналів довільної розмірності і зменшення обсягу обчислень при підсумовуванні рядів Хаара в двоїчній системі числення. У роботі отримані аналітичні вирази для швидких перетворень Хаара в одному і двох вимірах. Отримані вирази дозволяють будувати однорідні обчислювальні середовища перетворень Хаара, структура яких, інваріантна до довжини оброблюваної реалізації.

In work the opportunity of development of mathematical methods of fast transformations of Haar is investigated with the purpose of application them on a plane of signals of any dimension and reduction of volume of calculations at summation of lines of Haar in a binary notation. In work the analytical expressions for fast transformations Хаара in one and two measurements are received. The received expressions allow to build homogeneous computing environments of transformations of Haar , which structure, irrespective to length of processable realization.

Введение и постановка задачи. Существование и развитие эффективных методов и средств цифровой обработки сигналов уже долгое время опирается на возможности и свойства различных ортогональных преобразований, в том числе и на системы кусочно-постоянных функций базиса Хаара, который является основой современных математических методов вейвлет-анализа [1, 2, 3]. При этом спектральная сложность преобразований Хаара зависит от способов формирования слабозаполненных матриц, входящих в процедуры вычисления коэффициентов, и от способов разложения числа входных отсчетов сигнала N на множители. Так, оценки числа арифметических операций для различных N могут иметь вид:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \prod\nolimits_{l=i+1}^{n} r_l \quad \text{для } N = r_1 r_2 \ldots r_n; \tag{1}$$

$$Q_2 = r^2 (r^n - 1)/(r - 1) \quad \text{для } N = r_n,\ r \geq 3; \tag{2}$$

$$Q_3 = 2(2^n - 1) \quad \text{для } N = 2^n. \tag{3}$$

Основной недостаток таких вычислительных схем заключается в том, что с изменением N матрицы преобразования Хаара необходимо пересчитывать, а следовательно, должна меняться и структура вычислительной программы или устройства.

Также отсутствует возможность вычислений для N простого.

В [5, 6] аналитически получены результаты, позволяющие избавиться от отмеченных трудностей. Преобразование Хаара при этом выполняется для числа точек N, когда N может быть простым числом. Однако эти результаты не позволяют использовать их для обработки двумерных сообщений произвольной размерности. Следует также сказать, что в дискретных устройствах нашел применение известный метод синтеза исходных данных, заключающийся в анализе разрядов двоичной записи номера отсчета восстанавливаемой функции с последующим суммированием коэффициентов ортогонального преобразования Хаара с соответствующими знаками [7, 8].

Недостатком этих методов является их вычислительная избыточность.

Цель работы – исследовать возможность развития рассмотренных выше методов для применения их на плоскости сигналов произвольной размерности и уменьшения объема вычислений при суммировании рядов Хаара в двоичной системе счисления.

Результаты исследований. Как уже отмечалось, в [5, 6] получены быстрые преобразования Хаара на основе скалярного произведения вектора данных и множества базисных функций произвольной размерности. Покажем, что одномерное преобразование Хаара можно перенести на двумерный случай. Это обобщение весьма важно, поскольку преобразование может применяться к изображениям, которые имеют два измерения.

Существуют три основные области применения двумерных унитарных преобразований для обработки изображений. Во-первых, преобразования используются для выделения характерных признаков изображения. Так, например, постоянная составляющая обобщенного спектра Фурье пропорциональна средней яркости изображения, а высокочастотные составляющие характеризуют величину и ориентацию его контуров. Другой важной областью применения преобразований является кодирование изображений, когда ширина спектра уменьшается за счет отбрасывания или грубого квантования малых по величине коэффициентов преобразования. Третья область приложений – это сокращение размерности при выполнении вычислений.

Важнейшим моментом при рассмотрении преобразований изображений является существование быстрого вычислительного алгоритма. Для существования такого алгоритма необходимо, чтобы преобразование представлялось в виде произведений матриц, содержащих много нулевых элементов. Строго говоря, невозможно определить, можно ли преобразовать данную матрицу в произведение матриц, содержащих много нулей. Не существует также и методов для определения наилучшего способа факторизации таких матриц. Также алгоритмы образования и определения места положения значащих элементов в матрице используют лексикографическую индексацию, что усложняет процесс преобразований изображений. Наконец, отсутствуют методы быстрых двумерных преобразований Хаара для матриц исходных изображений произвольной размерности.

Пусть задана матрица изображения X размерностью $N\times N$ и при этом N может быть любым числом, в том числе и простым. Как и для одномерного случая [5, 6], вводя понятие базового вектора данных строки изображения и на его основе определяя базовые отсчеты сигнала, а затем вычисляя промежуточные суммы Хаара по строкам образованной матрицы, получим промежуточное (одномерное) преобразование Хаара в виде:

$$C_{mj}^{z} = 2^{\frac{m-1}{2}} \Big/ N^{*}\left[X_{k,[\log(N-1)-m]}^{z} - X_{k+1,[\log(N-1)-m]}^{z}\right];$$
$$C_{01}^{z} = 1 \Big/ N^{*}\left[X_{k,(\log N-1)}^{z} + X_{(k+1),(\log N-1)}^{z}\right]; \qquad (4)$$
$$C_{N^{*}+i}^{z} = \left(X_{i}^{z} - X_{N^{*}+1}^{z}\right)\Big/ N^{*}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, (N - N^{*}).$$

Причем для этих формул $m = 1, 2, \ldots, \log N$; $j = 2^{m-1}$, а для выражения стоящего в квадратных скобках $m = m - 1$ и $k = 2j - 1$; $z = 1, 2, \ldots, N$ – номер соответствующей строки изображения. Переходя от двойной нумерации в коэффициентах к обычной, сформируем промежуточную матрицу преобразования Хаара в виде

$$C = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \ldots & C_{N^*}^1 & C_{N^*+i}^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 & \ldots & C_{N^*}^2 & C_{N^*+i}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1^z & C_2^z & C_3^z & \ldots & C_{N^*}^z & C_{N^*+i}^z \end{vmatrix}, \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, (N - N^{*}). \qquad (5)$$

Так если размерность исходной матрицы изображения равна 5×5, то в матрице C коэффициенты построчного преобразования расположатся на следующих местах :

$C_{11}^{1} = C_{2}^{1}$, $C_{21}^{1} = C_{3}^{1}$ и т.д. до $C_{22}^{1} = C_{4}^{1}$ и $C_{N^{*}+i} = C_{5}$, т.к. значения базового вектора в этом случае равно $4(N^{*} = 2^{2} < N)$. Свободный член всегда будет занимать первую позицию в строке.

Затем необходимо выполнить аналогичные вычислительные процедуры для столбцов матрицы $|C|$, предварительно образовав базовые обобщенные отсчеты столбцов из полученных строчных коэффициентов Хаара этой матрицы

$$X_{p}^{\lambda,*} = \left(X_{p}^{\lambda} + X_{N^{*}+p}^{\lambda}\right)\Big/2, \text{ если } p = 1, 2, \ldots, (N - N^{*});$$
$$X_{p}^{\lambda,*} = X_{p}^{\lambda}, \text{ если } p = (N - N^{*}+1), (N - N^{*}+2), \ldots, N^{*}. \qquad (6)$$

и записав обобщенные промежуточные суммы Хаара в виде:

$X_{in}^{\lambda} = \sum X_{k,(n-1)}^{\lambda}$, где $n = 1, 2, \ldots, (\log N - 1)$; $I = 1, 2, \ldots, N^{*}/2^{n}$; $X_{p,0}^{\lambda}$ – базовые обобщенные значения столбцов, номера которых λ изменяются от 1

до $N^{*}+i$. С учетом (6) окончательные выражения для коэффициентов двумерного преобразования Хаара произвольной размерности запишутся

$$C_{mj}^{\lambda} = 2^{\frac{m-1}{2}} \Big/ N^{*}[X_{k,(\log N-1)-m}^{\lambda} - X_{k+1,(\log N-1)-m}^{\lambda}];$$
$$C_{01}^{\lambda} = 1 \Big/ N^{*}(X_{k,\log N-1}^{\lambda} - X_{k+1,\log N-1}^{\lambda}); \qquad (7)$$
$$C_{N^{*}+1}^{\lambda} = (X_{i} - X_{N^{*}+1}) / N^{*}, \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, (N - N^{*}).$$

Количество операций типа сложения-вычитания при одномерном и двумерном преобразовании Хаара составит приблизительно $2N$ и $4N$ соответственно, что в два раза меньше известных оценок, например, при $N = 9$ (2).

При вычислении сумм Хаара в двоичной системе счисления зададимся коэффициентами Хаара α_{mj} и полагая $n = 2^{m_{\circ}}$ запишем следующее выражение [8]:

$$P_{n}(x) = a_{1} + \sum_{m=1}^{m_{0}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} a_{mj} \chi_{mj}(x). \qquad (8)$$

Более удобно оперировать с числами $b_{mj} = 2^{\frac{m-1}{2}} a_{mj}$. Тогда (8) можно переписать как

$$P_{n}(x) = a_{1} + \sum_{m=1}^{m_{0}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} b_{mj} \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x). \qquad (9)$$

Если $\boldsymbol{x}$ выражается в двоичной системе счисления, $x = 0, \varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \ldots, \varepsilon_{s}$, то (9) принимает вид

$$P_{n}(x) = a_{1} + \sum_{m=1}^{m_{0}} (-1)^{\varepsilon_{m}} b_{m,j_{m}}, \qquad (10)$$

где $j_{m} = \varepsilon_{1}, \varepsilon_{2}, \ldots, \varepsilon_{m-1}+1$.

Тогда при каждом m легко выделить цифры $E_{1}\ E_{2}\ \ldots\ E_{m-1}$. Для этого нужны только простейшие логические операции. По значениям m и j_{m} можно сформировать адрес ячейки, содержащей $b_{m,j_{m}}$. Если следующая цифра в двоичной записи числа x (т.е. E_{m}) равна нулю, то $b_{m,j_{m}}$ прибавляется к накапливаемой сумме, а если следующая цифра равна 1, то $b_{m,j_{m}}$ вычитается:

$$Z_{m} = Z_{m-1} + (-1)^{E_{m}} b_{m,j_{m}}, \qquad (11)$$

где $m = 1, 2, \ldots, m_{0}$.

Начав $Z_0 = a_1$, получим $Z_0 = P_n(x)$. В каждом цикле здесь производится одно сложение и несколько логических операций. Поэтому общее число элементарных операций, затрачиваемых на вычисление $P_n(x)$ равно $O(m_0)$ или $O(\log_2 n)$, где n – число отсчетов функции, а запись $O(\log_2 n)$ означает, что число вычислительных операций в одной точке стремится к значению двоичного логарифма размерности базиса Хаара и для восстановления исходной функции во всех "n" её точках требуется $n\log_2 n$ операций сложения-вычитания.

Рассмотрим работу алгоритма при восстановлении исходной информации, например, при $\boldsymbol{x} = 0{,}101$. Задавая m значение 1 по формуле $j_m = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}+1$ вычислим индексы коэффициентов Хаара, которые будут равны

$$j_m = 0+1 = 1 \text{ и } b_{m,j_m} = b_{11}.$$

Определим теперь знак этого коэффициента, анализируя первый разряд после запятой в двоичном представлении числа $\boldsymbol{x}$, и т.к. он равен 1, коэффициент b_{11}, берем со знаком минус. Аналогично при $m = 2$ и 3, $j_m = 0, 1, 01+1 = 2$ и $j_m = 0, 10, 1+1 = 3$ коэффициенты b_{22} и b_{33} суммируются со знаком плюс и минус соответственно. Таким образом, значение исходной функции в точке $\boldsymbol{x} = 0{,}101$ определяется как

$$P_n(0{,}010) = a_1 - b_{11} + b_{22} - b_{33}. \quad (12)$$

Знаки коэффициентов Хаара в (12) совпадают со значениями, вычисленными аналитически на основании определения базисных функций системы.

Недостатком рассмотренного метода является его вычислительная избыточность. Покажем, что объем вычислений при восстановлении исходных данных по коэффициентам Хаара в двоичной системе счисления может быть существенно уменьшен.

Для этих целей, прежде чем суммировать коэффициенты Хаара на основании анализа двоичных разрядов в дискретных точках восстановления исходных функций, сформируем промежуточные суммы по выражениям согласно [8]. Тогда сумму коэффициентов Хаара в каждой точке восстановления можно представить в виде

$$P_n(x) = A_{j_m} + b_{m,j_m}(-1)^{\varepsilon_m}, \quad (13)$$

где $j_m = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1} + (N/2-2)$ для первого слагаемого и $j_m = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1} + 1$ для второго слагаемого, причем $m = m_0$.

Так для $x = 0{,}000$ и $N = 8$ при $m = 3$ получим, выделив первые два разряда в двоичном представлении числа $x(m-1)$, следующие значения $j_m = 00 + (N/2-2) = 2$ и $j_m = 00+1 = 1$ для соответствующих слагаемых выражения (13). И так как следующий разряд после выделенных равен нулю, то окончательный вид (13) будет выглядеть следующим образом

$$P_n(0{,}000) = A_2 + b_{31}. \quad (14)$$

Развернув A_2 как сумму A_0+C_3 и далее как C_0+C_2 в окончательном виде получим

$$P_n(0{,}000) = C_0 + C_2 + C_3 + b_{31}, \quad (15)$$

где в обычной нумерации $b_{31} = C_5$.

Эти значения коэффициентов и их знаков совпадают со значениями, определенными на основе классических вычислений базисных функций Хаара, но количество операций типа сложение-вычитание составляет при этом $2(N-1)$ вместо $N \log N$ известного метода.

Выводы. В работе получены аналитические выражения для быстрых преобразований Хаара в одном и двух измерениях. При этом число входных отсчетов сигнала или сторон изображения может быть как составным, так и простым числом. Полученные выражения позволяют строить однородные вычислительные среды преобразований Хаара, структура которых, инвариантна к длине обрабатываемой реализации. Также рассмотрены возможности суммирования рядов Хаара в двоичной системе счисления на основе анализа разрядов в дискретных точках восстанавливаемых функций и приводится аналитическая запись этого алгоритма, позволившая снизить количество операций типа сложения-вычитания в $\frac{N\log N}{2(N-1)}$ раз.

Список литературы: **1.** *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Под ред. И.Б. Фоменко – М.: Связь, 1980. – 248 с. **2.** *Соболев Ю.В., Поляков П.Ф., Иванов В.Г.* Эффективность анализа и синтеза в дискретном базисе Хаара // Известия Высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 1983. – Т. 26. – № 9.– С. 54–56. **3.** *Иванов В.Г., Любарський М.Г., Ломоносов Ю.В.* Применение вейвлет-анализа к сжатию звуковых сигналов // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2003. – Т. 1. – № 7. – С. 39–50. **4.** *Иванов В.Г.* Параллельные и последовательные структуры Хаара для цифровой обработки сигналов // Электронное моделирование. – 2005. – № 3. – С. 55–66. **5.** *Иванов В.Г.* Преобразование Хаара для произвольного числа точек // Известия Высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 1989. – № 7. – С. 41–45. **6.** *Іванов В.Г.* Формальное описание дискретных преобразований Хаара // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 5. – С. 68–75 **7.** *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с. **8.** *Иванов В.Г.* Не симметричные алгоритмы получения данных в системе Хаара // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2002. – Т. 6. – № 9. – С. 10–12.

Поступила в редакцию 10.11.2006