УДК 519.21

В.А. ДИКАРЕВ, д-р физ-мат. наук, проф. (г. Харьков),
В.М. ШЕРШЕНЬ

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ СЕТЕЙ С МАССИВНЫМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ

У статті досліджується задача про стабілізацію процесу випадкових блукань на мережі, та приведені умови необхідні для стабілізації. Приводяться нові теоретичні результати та приклади їх практичного застосування.

There are random network walk process stabilization problem investigated. The required conditions of stabilization were described. Lead the new theoretical results and examples of their practical application.

Постановка проблемы и анализ литературы. В последние десятилетия процессы случайных блужданий в связных сетях изучались многими специалистами в области дискретного и случайного анализа. Математические модели этих процессов используются в экономике, исследовании систем передачи данных, в частности, сети INTERNET (см., например, работы [1 – 7] и содержащуюся в них библиографию). В этой статье рассмотрен процесс случайных блужданий на множестве связных сетей $\{\Gamma_i\}$ с общим центром. Общим центром называется такая сеть, которая имеет непустые пересечения со всеми сетями Γ_i из $\{\Gamma_i\}$. Во многих случаях процесс случайных блужданий на общем центре является в каком-то смысле более предпочтительным (доминирующим) по сравнению со случайными блужданиями на множестве вершин сети, которые общему центру не принадлежат.

В этой работе основное внимание уделено решению следующей задачи. Эволюция процесса случайных блужданий на общем центре задана. Требуется установить, при выполнении каких условий стабилизация процесса случайных блужданий на всей сети может быть достигнута за заданный промежуток времени. Эта задача является продолжением исследований, произведенных в работах [8, 9]. В них была решена задача о стабилизации распределений неоднородного марковского процесса при возмущениях отдельных его частей (фрагментов). Было установлено, что при многократных возмущениях фрагментов вероятности состояний процесса либо принимают предельные значения (фокусировка), либо локализуются вблизи них (σ-фокусировка). Стабилизацией называется любой из этих случаев. Основными условиями, которые приводят к стабилизации, являются быстро изменяющиеся во времени факторы, вызывающие сильные возмущения основных характеристик процесса. Было установлено, что эти возмущения можно выбрать так, чтобы стабилизация на любом фрагменте была реализована на любое заданное распределение за сколь угодно малый промежуток времени. Такие возмущения будем называть фокусирующими. В [8] была решена задача о стабилизации процесса с конечным или счетным числом состояний. В [9] задача о стабилизации была решена для процесса, фазовое пространство которого является континуальным. В [8, 9] рассматривались, в основном, настолько сильные возмущения, что на возмущенных фрагментах стабилизация достигалась уже при первом их возмущении. Далее при стабилизации процессов случайных блужданий на сетях будет использоваться подход, предложенный в [8, 9].

Цель статьи. Изучим процесс случайных блужданий на множестве сетей с общим центром. Общим центром (центром множества $\{\Gamma_i\}$) будем называть такую сеть $\Gamma_0 \in \{\Gamma_i\}$ которая имеет непустые пересечения со всеми сетями из $\{\Gamma_i\}: \{\Gamma_0 \cap \Gamma_i\} \neq \varnothing,\ i = 0, 1, \ldots, n$. Предполагается, что: число вершин в $\bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$ конечно; множество $\{\Gamma_i\}$ имеет единственный центр. Далее распределением процесса случайных блужданий на сети Г для случая, когда процесс стационарен (не зависит от времени), будем называть стационарное распределение стохастической матрицы $P = \left\| p_{ij} \right\|$, здесь $i,\ j$ – номера вершин сети Γ_i; p_{ij} – вероятности перехода из i в j.

Рассматриваемые далее процессы случайных блужданий нестационарны (вероятности перехода $p_{ij} = p_{ij}(t)$ изменяются во времени). Предполагается, что стохастические матрицы $P = P(t)$, описывающие случайные блуждания на сети, при любом фиксированном t имеют стационарное распределение. Известно, что если матрица P не зависит от времени и имеет стационарное распределение, то любое начальное распределение, заданное на сети с такой матрицей, с ростом t стремится к ее стационарному распределению. Если же $P = P(t)$ зависит от времени, то даже, когда при всех фиксированных t $P(t)$ имеет стационарное распределение, ее вектор распределения $\vec{p}(t)$ при $t \to \infty$, вообще говоря, не стремится к какому либо пределу. Однако, если $P(t)$ изменяется во времени «достаточно медленно», то через некоторый промежуток времени распределение вероятностей $\vec{p}(t)$ процесса случайных блужданий с матрицей $P(t)$ также будет медленно эволюционировать во времени.

Случайные блуждания на сетях с общим центром. Изучим сначала процесс случайных блужданий на множестве сетей с общим центром в предположении, что вероятностные связи на каждой сети $\Gamma_i \in \{\Gamma_i\}$, включая центр, подвергаются сильным возмущениям. Подчеркнем, что, в отличие от подхода, описанного в [10], теперь возмущениям подвергаются не все сети из множества $\{\Gamma_i\}$, а лишь отдельные его элементы. Эволюция процесса рассматривается при $t \in [s_0, t_0]$, $t_0 \le \infty$.

Перечислим условия, которым должны удовлетворять распределения, действующие на множестве сетей $\{\Gamma_i\}$ с общим центром.

Предполагается, что взаимное положение всех сетей из $\{\Gamma_i\}$ не изменяется с изменением времени. Каждая сеть Γ_i многократно подвергается фокусирующим возмущениям.

После каждого возмущения Γ_i вектор распределения $\vec{p}_i(t)$ процесса на нем не изменяется до следующего возмущения Γ_i или его части. Это условие имеет место и в том случае, когда между двумя последовательными возмущениями сети Γ_i возмущениям подвергаются и сети, имеющие с Γ_i непустые пересечения.

Рассмотрим сначала случай, когда возникающие после каждого возмущения Γ_i векторы распределения $\vec{p}_i$ будут коллинеарны.

Условия согласования. Пусть Γ_i, Γ_j – любые сети из $\{\Gamma_i\}$, для которых $\{\Gamma_i \cap \Gamma_i\} = \Gamma_{ij} \ne \varnothing$, $\vec{p}_{ij}$ – вектор распределения процесса случайных блужданий на Γ_{ij}. Обозначим через $\vec{p}_{ij}$, $\vec{p}_{ji}$ подвекторы векторов распределений $\vec{p}_i$, $\vec{p}_j$ на Γ_{ij}. Считаем что векторы $\vec{p}_{ij}$, $\vec{p}_{ji}$ коллинеарны. Это свойство должно выполнятся и для векторов распределений на пересечениях любого числа сетей из $\{\Gamma_i\}$.

Покажем, что если условия 1 – 3 выполняются, то при $t \to \infty$ стабилизация на $\{\Gamma_i\}$ будет иметь место.

Пусть Γ_i и Γ_j любые сети из $\{\Gamma_i\}$ такие, что $\Gamma_{ij} \ne \varnothing$, и t_k, t_{k+1} – моменты окончания возмущений Γ_i и Γ_j. Считаем, что:

a) мера Лебега для всех $\Omega_{ij}\,(i \ne j)$ удовлетворяет условию $\mu(\Omega_{ij}) \ge t\sigma > 0$. Здесь σ не зависит от (t_k, t_{k+1}) и индексов i и j;

b) на (t_k, t_{k+1}) никаких других возмущений кроме возмущений сетей Γ_i и Γ_j нет.

Рассмотрим сумму

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j} \left| \vec{\pi}_{ij}(t_{k+1}) - \vec{\pi}_{ij}(t_k) \right|. \tag{1}$$

Здесь суммирование проводится по всем парам несовпадающих индексов

i и j, для которых $\Omega_{ij} \neq \varnothing$ $(i \neq j)$; моменты такие, как в пункте b); $\vec{\pi}_{ij}(t_{k+1})$, $\vec{\pi}_{ij}(t_k)$ – векторы распределений на Γ_{ij} в моменты t_{k+1}, t_k. После каждого возмущения на любой сети из Γ_i, Γ_j соответствующая разность из (1) уменьшается. Значит при $t \to \infty$ сумма (1) монотонно убывает. Используя подход, предположенный в [8], можно доказать, что в случае, когда возмущение на каждой сети Γ_i приводит к фокусировке на ней, сумма (1) стремится к нулю при $t \to \infty$. В этом случае в пределе p_{ij} и p_{ji} на всех Γ_{ij} будут совпадать. Это означает, что при $t \to \infty$ имеет место фокусировка. Если же возмущение всех сетей из $\{\Gamma_i\}$, или их части, приводит к σ-фокусировке, то при $t \to \infty$ σ-фокусировка будет иметь место на множестве $\{\Gamma_i\}$.

Часто природа возмущений, которым подвергаются сети из $\{\Gamma_i\}$, изменяется с течением времени. Это приводит к тому, что распределения $\vec{p}_i$ на Γ_i также изменяются. В этом случае стабилизации на $\{\Gamma_i\}$, вообще говоря, не будет. Рассмотрим случай, когда возмущения с изменяющимися во времени фокусирующими свойствами порождают на всех сетях из $\{\Gamma_i\}$ такие распределения, которые эволюционируют, «подчиняясь» эволюции центра.

Рассмотрим сначала модельный пример такой эволюции. В нем условия, которым удовлетворяют Γ_i, и действующие на них возмущения выбраны так, чтобы необходимые для уяснения сути дела расчеты были максимально просты. Считаем, что:

– длины векторов распределений $\vec{p}_i$ на всех Γ_i $(i \neq 0)$ на несколько порядков меньше длины вектора распределения центра $\vec{p}_0$ (случай массивного центра);

– любое возмущение Γ_0 происходит после возмущений всех $\Gamma_i \neq \Gamma_0$;

– векторы $\vec{p}_i(t)$ распределений для всех Γ_i, после возмущения каждого из них, удовлетворяют условию

$$\left|\vec{p}_{0i}(t_k)\right| = 2^{-1}\left|\vec{p}_i(t_k)\right|. \tag{2}$$

Здесь $\vec{p}_{0i}(t)$ – вектор распределения на Γ_{oi} при $t = t_k$; t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ – момент фокусировки. Из условия (2) следует, что если возмущения, действующие на Γ_0, сфокусируют $\vec{p}_0(t)$ на одно и тоже распределение, то достаточно того, чтобы (2) выполнялось при $t_k = 0$. Тогда оно будет выполнятся для всех t_k.

Из перечисленных выше условий следует, что существует такой промежуток $\Delta_1 = (0, t_1)$, что: распределения $\vec{p}_{0i}$ на всех Γ_{0i} $(i = 1, \ldots, n)$ при t

близких к t_1 будут лишь незначительно отличатся от распределений на Γ_{0i} вектора $\vec{p}_{0i}$; распределение $\vec{p}_0(t_1-0)$ к моменту t_1 будет мало отличатся от $\vec{p}_0(0)$. Предполагается, что все возмущения центра Γ_0, действующие на Δ_1, сфокусировали $\vec{p}_0(t)$ на одно и тоже распределение.

Пусть в момент времени t_1 центр Γ_0 подвергается возмущению, которое изменяет $\vec{p}_0(t_1-0)$ на δ_1, δ_1 – мало.

Рассмотрим промежуток (t_1, t_2), на котором возмущение всех сетей из $\{\Gamma_i\}$ $(i=1,\dots,n)$ удовлетворяют тем же условиям, что и на $(0, t_1)$.

Считаем, что в момент t_2 центр подвергается возмущению, которое (как и возмущение в момент t_1) мало изменяет распределение $p_0(t_2-0)$. Рассмотрим промежутки (t_n, t_{n+1}), $(n=2, 3,\dots)$. Пусть на каждом из них возмущения, действующие на всех $\Gamma_i \in \{\Gamma_i\}$, удовлетворяют тем же условиям, что и на промежутках $(0, t_1)$ и (t_1, t_2). Из изложенного следует, что эволюция распределений $p(t)$ на $\Gamma = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Gamma_i$ в основном определяется эволюцией центра. Распределение $p_0(t)$ претерпевает незначительные изменения (скачки) лишь в моменты t_k $(k=1, 2, \dots)$. Кроме того, $p_{0i}(t)$ изменяются и при фокусировках на Γ_i. Из (2) следует, что эти изменения будут малы для всех t, близких t_k. Условие (2) можно ослабить, потребовав, чтобы

$$\left|\vec{p}_{0i}(t_k)\right| = \delta \cdot \left|\vec{p}_i(t_k)\right|, \; 0 < \delta \le \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Модифицируем описанный выше вариант эволюции распределений на $\{\Gamma_i\}$. Считаем, что скачки распределения $p_0(t)$ стали меньше, чем в описанной выше схеме возмущений; возмущения всех Γ_i $(i=1, 2, \dots, n)$ происходят в k раз чаще, чем при построении интервалов (t_n, t_{n+1}). Это приведет к k-кратному их уменьшению. Обозначим через (t'_n, t'_{n+1}) промежутки, отвечающие новому (учащенному) режиму возмущений. Пусть на всех (t'_n, t'_{n+1}) процесс случайных блужданий удовлетворяет тем же условиям, что и на (t_n, t_{n+1}) (до учащения возмущений). Согласуем новые и старые возмущения на Γ_i $(i=1, 2, \dots, n)$ так, чтобы последовательность $\{t'_n\}$ являлась частью последовательности $\{t_n\}$. Тогда любой промежуток (t_n, t_{n+1}), $(n=0, 1,\dots)$ будет содержать k промежутков из последовательности $\{(t'_n, t'_{n+1})\}$.

Раньше распределение центра $p_0(t)$ возмущалось лишь в моменты $t = t_n$. Теперь будем возмущать $p_0(t)$ в моменты t'_n. Промежуток $(0, t_1)$ содержит k членов $t'_{n_1}, \ldots, t'_{n_k}$ последовательности $\{t'_n\}$. Возмутим $p_0(t)$ в моменты $t'_{n_1}, \ldots, t'_{n_k}$ так, чтобы возникшие при этом скачки $|p_0(t)|$ были равны $\frac{1}{k}\delta_1$. Отметим, что теперь сумма всех скачков $|p_0(t)|$ на $(0, t_1)$ будет по-прежнему равна δ_1. Точно так же перераспределим возмущения $\vec{p}_0(t)$ (локализованные раньше в моменты t_n, $(n = 0, 1, \ldots)$) на всех (t_n, t_{n+1}). В результате получим эволюцию случайных блужданий на $\{\Gamma_i\}$, для которой скачки распределения $p_0(t)$ будут в k раз меньше, чем раньше (когда $p_0(t)$ подвергалось возмущениям лишь в моменты t_n). При неограниченном росте k все скачки распределения $p_0(t)$ будут стремится к нулю. Таким образом, при больших k эволюцию на $\{\Gamma_i\}$ можно приближенно считать непрерывной.

Задача об эволюции центра в общем виде. Пусть задана векторная функция $\vec{\varphi}(t)$, определяющая эволюцию центра на $(0 \le t \le T)$, $T < \infty$. Требуется выбрать возмущения, действующая на $[0, T]$ так, чтобы эволюция $\vec{p}_0(t)$ на $[0, T]$ с заданной точностью совпадала с $\vec{\varphi}(t)$.

Поставим задачу более точно.

Пусть на $[0, T]$ задана векторная кривая L, уравнение которой имеет вид

$$\vec{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}. \tag{4}$$

Здесь m – число вершин сети Γ_0,

$$0 \le \varphi_k(t) \le 1, \ (k = 1, \ldots, m), \ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) = 1.$$

Проверим, что при соответствующем выборе возмущений, действующих на Γ_i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, эволюцию вектора $\vec{p}_0(t)$ на Γ_0 можно направить так, чтобы при всех $t \in [0, T]$ выполнялось условие

$$|\vec{p}(t) - \vec{\varphi}(t)| < \delta, \ t \in [0, T]. \tag{5}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\vec{\varphi}(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Считаем, что $\vec{\varphi}(0) = \vec{p}_0(0)$. Этого можно добиться соответствующим возмущением стохастической матрицы Γ_0. Разобьем $[0, T]$ на частичные отрезки $[t_i, t_{i+1})$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Пусть действующие на $[0, t_1)$ возмущения таковы, что

$$\left|\vec{\varphi}(t)-\vec{p}_0(t)\right|<\varepsilon\,,\ 0\le t\le t_1\,, \tag{6}$$

и ε мало. Существование возмущений, обеспечивающих выполнение (6) было установлено ранее. В момент t_1 возмутим $\vec{p}_0(t_1-0)$ так, чтобы $\vec{p}_0(t_1)=\vec{\varphi}(t_1)$.

Выполнение условия (6) на отрезках $[t_1,t_2)$, $[t_2,t_3)$,… можно получить тем же способом, что и для $[0,t_1)$.

Пусть в точках $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots$ $\vec{\varphi}(t)$ имеет разрывы. Тогда, возмущая соответствующим образом $\vec{p}_0(t-\tau_1)$, $\vec{p}_0(t-\tau_2)$, …, получим в $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots$ разрывы $\vec{p}_0(t)$, совпадающие с разрывами $\vec{\varphi}(t)$. Теперь задача о стабилизации может быть решена так же, как и для случая непрерывной функции $\vec{\varphi}(t)$.

Рассмотрим случай, когда возмущения, которым подвергаются сети из $\{\Gamma_i\}$, не приводят к фокусировке распределений на каждой из них. Возмущение любой сети Γ_i лишь незначительно изменяет распределение p_0 на ней. Допустим, что последовательность распределений, возникающая на Γ_i, при воздействии на неё возмущений $(\delta\Gamma_i)\alpha$ $(\alpha=1,2,\ldots)$, является сходящейся. Если это условие выполняется для всех Γ_i, то фокусировка на $\{\Gamma_i\}$ будет иметь место.

Выводы. Таким образом, в работе изучены процессы случайных нестационарных блужданий в сетях с общим центром. Получены условия, необходимые для их стабилизации. Полученные результаты могут быть использованы в экономике и системах передачи данных.

Список литературы: **1**. *Bollobas B.* Random graphs, Academic press, – New York. – 1985. **2**. *Moukarzel C.* Spreading and shortest path in systems with spare long-range connections, Phys. rev. E60, 1999. – P. 6263–6266. **3**. *Kauffman S.A.* Metabolic stability and epigenesist in randomly constructed genetic nets // J. Theo. Biol. – Vol. 22. – P. 437–467. **4**. *Neibur E., Schuster H.G. and Kammen D.M.* Collective frequencies and metastability in networks of limit-cycle oscillators with time delay // Phys. Rev., 1991. – Lett. 67. – P. 2753–2756. **5**. *Aiello W., Chung F., Lu L.* A random graph model for massive graphs, Proc. ACM Symp. On Theory of Computing 2000. **6**. *Dorogovtsev S.N. and Mendes J.F.* Evolution of networks: From biological nets to the Internet and www, Oxford University Press, Oxford, 2003. **7**. *Watts D.* Small worlds: The dynamics of networks between order and randomness. Princeton University Press, Princeton, 1999. **8**. *Дикарев В.А.* Стабилизация распределений марковского процесса при возмущении его континуальных компонент // Доклады НАНУ. – 2003. – № 6. – С. 47–53. **9**. *Дикарев В.А., Герасин С.Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Доклады НАНУ. – 2003. – № 8. – С. 90–93. **10**. Стабилизация распределений марковского процесса с континуальным множеством состояний при локальных возмущениях его фрагментов. Москва. Тезисы докладов международной конференции посвященной 100-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова. Механико-математический факультет МГУ. – М.: МГУ. – С. 629.

Поступила в редакцию 22.03.2005