УДК 681.3

В.А.ТИМОФЕЕВ, канд. техн. наук, ХНУРЭ (г. Харьков)

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Розглядається задача ідентифікації динамічного об'єкту в припущенні, що відомим є тільки рівень вади. Досліджено існуючі алгоритми. Розроблено рекурентний алгоритм ідентифікації, що має супремальні властивості та властивості МНК-оцінок, виконано оцінку його збіжності. Перевагою розробленого алгоритму є простота його використання в задачах контроля та керування.

The problem of dynamical object identification is considered under suggestion that only noise level is known. A survey of existing algorithms is given. Recurrent identification algorithm is developed, having supremal properties of LSM-estimations and it's convergence is analyzed. The dignity of developed algorithm is simplicity it's application to the problems of monitoring and control.

Введение. На сегодня проблема управления техническим объектом в условиях неопределенности – одна из центральных проблем современной теории управления. Адекватным математическим аппаратом для решения этой проблемы является теория адаптивных систем управления, а широкое распространение микропроцессорной техники привело к развитию дискретных адаптивных систем управления [1 – 16].

К настоящему времени сформировался ряд относительно независимых направлений в теории адаптивных систем. Здесь, прежде всего, следует выделить адаптивные регуляторы с минимальной дисперсией (основополагающая работа [17]), адаптивные регуляторы с обобщенной минимальной дисперсией (основополагающие работы [18, 19]), адаптивные системы с требуемым размещением нулей и полюсов (основополагающие работы [19 – 21]), системы с адаптивными упредителями (основополагающая работа [22]).

Во всех этих подходах предполагается, что возмущения, действующие в системе, имеют стохастическую природу, причем это, как правило, белый шум с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией. В практических ситуациях статистические предпосылки являются надуманными, в связи с чем гораздо более реальными представляются допущения лишь об ограниченности шума или его разностей по амплитуде. В этих условиях использование методов идентификации, основанных на квадратичных критериях и, прежде всего, рекуррентного метода наименьших квадратов явно неэффективно. Возникающие затруднения частично могут быть преодолены в рамках адаптивных робастных систем управления [23 – 26], в которых, тем не менее, все равно «спрятаны» определенные статистические предпосылки.

В связи с этим представляется целесообразным осуществить синтез теории адаптивного и критического управления, что приведет к созданию адаптивных супремальных методов контроля, идентификации и управления динамическими объектами, функционирующими в условиях существенной неопределенности о характеристиках объекта и окружающей среды.

Целью настоящей работы и является разработка рекуррентного метода идентификации, обеспечивающего получение оценок, обладающих супремальными свойствами, которые не зависят от статистических характаристик сигналов и помех, и свойствами МНК-оценок.

Постановка задачи. Рассмотрим динамический объект, функционирующий в замкнутой системе управления $S_D(P,C)$, описываемый разностным уравнением

$$A(q)y(k) = q^{-d} B(q)u(k) + w(k)\,, \tag{1}$$

где полиномы $A(q) \in R[q,n]$ с $a_0 = 1$, $B(q) \in R[q,m]$; d – время чистого запаздывания $d \in N^+$; y, u и w – выходной, управляющий и возмущающий сигналы соответственно.

Относительно возмущений предполагается ограниченность их первых разностей.

В случае, если параметры объекта априори известны и неизменны, задача критического управления может быть решена с помощью супремального регулятора, т.е.

$$\Delta F(q)B(q)u\,(k) = -E(q)y(k)\,, \tag{2}$$

где полиномы $F(q) \in R[q,d-1]$ с $f_0 = 1$ и $E(q) \in R(q,n)$ задаются уравнением

$$\Delta A(q)F(q) + q^{-d} E(q) = 1\,.$$

В том случае, если параметры объекта неизвестны, можно воспользоваться тем или иным методом идентификации, а затем применить закон управления (2), в котором истинные значения параметров объекта заменены их оценками. В этом и состоит суть адаптивного подхода к проектированию систем управления объектами, функционирующими в условиях неопределенности. Как правило, в качестве процедур идентификации применяются те или иные модификации рекуррентного метода наименьших квадратов либо проекционные алгоритмы, так или иначе связанные с квадратичными критериями. При использовании критериев, отличных от квадратичных, например, модульных, хотя и получают робастные процедуры, статистический смысл задачи идентификации тем не менее сохраняется. Естественно, что такие алгоритмы идентификации не могут быть использованы в критических системах управления.

В связи с этим возникает необходимость синтеза адаптивных алгоритмов идентификации, не связанных ни с какими статистическими предпосылками, обладающих высокой скоростью сходимости, вычислительной простотой и пригодных для работы в реальном времени в контуре критической системы управления динамическим объектом.

Алгоритмы идентификации, применяемые в критических системах. Введем в рассмотрение полином

$$G(q) = 1 - \Delta A(q)\,, \tag{3}$$

где $G(q) = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \ldots + q^{-n-1}$,

и перепишем уравнение объекта (1) в виде

$$y(k) = \Theta^T \psi(k-1) + \Delta w(k)\,, \tag{4}$$

где $\Theta = (g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}, b_0, b_1, \ldots b_m)^T$;

$\psi(k-1) = (y(k-1), y(k-2), \ldots, y(k-n-1);$

$\Delta u(k-d)\,, \Delta u(k-d-1), \ldots, \Delta u(k-d\text{ - }m))^T$;

$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$;

$\Delta w(k) = w(k) - w(k-1)$.

Тогда задача идентификации с позиции теории критических систем сводится к нахождению оценок неизвестного вектора параметров Θ таких, что

$$\Xi(\hat{\Theta}) = \{\hat{\Theta} : \left| y(k) - \hat{\Theta}^T - \Psi(k-1) \right| \le \delta,\ \forall k \in N\}\,. \tag{5}$$

Здесь $\hat{\Theta}$ – оценка параметра Θ.

К настоящему времени сложился ряд подходов к задаче идентификации, связанной с неравенством (5). Это, прежде всего, подход Фогеля-Хуанга [27], в основе которого лежат некоторые геометрические построения. Известна также процедура Лозано-Лила-Ортеги [28], синтезированная как на геометрических предпосылках, так и исходя из условий устойчивости процесса сходимости. Нельзя не отметить также алгоритм Канудас де Вита-Каррильо [29], являющийся некоторой модификацией экспоненциально взвешенного рекуррентного МНК. Несмотря на эффективность этих процедур, их использование в критических системах наталкивается на серьезные затруднения.

Так, оптимальный алгоритм Фогеля-Хуанга настолько сложен с вычислительной точки зрения, что не может быть и речи о его использовании в режиме реального времени. Эта сложность обусловлена, прежде всего, необходимостью отыскания на каждой итерации глобального минимума многоэкстремальной функции $n+m+2$ переменных, что само по себе является достаточно сложной проблемой.

В алгоритме Лозано-Лила-Ортеги, имеющем вид

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \frac{\alpha P(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(|e(k)| - \delta_1 \operatorname{sign} e(k), \ \alpha \in (0,1); \quad (6)$$

$$P^{-1}(k) = \begin{cases} P^{-1}(k-1) + \dfrac{\alpha P(k-1)\psi(k-1)}{(1+\psi^T(\mathrm{k}-1)P(k-1)\,\psi(k-1)e(k)}(|e(k)| - S_1) \times \\ \qquad \times \operatorname{sign}\, e(k), \quad |e(k)| > \delta_1; \\ P^{-1}(k-1), \quad |e(k)| \le \delta_1; \end{cases} \quad (7)$$

$$S_1 = \sqrt{1+\alpha}\,\delta; \quad (8)$$

$$e(k) = y(k) - \hat{\Theta}^T(k-1)\psi(k-1), \quad (9)$$

априори предполагается ограниченность значения $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k\text{-}1)$, из которого следует условие сходимости

$$\lim_{k\to\infty} |e(k)| = \sqrt{1+\alpha}\,\delta, \quad \alpha \in (0,1),$$

т.е. ошибка идентификации $e(k)$ никогда не может быть по модулю меньше заданных ограничений δ.

В алгоритме Канудас де Вита-Каррильо

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \frac{\alpha(k)\mathrm{P}(k-1)\psi(k-1)}{\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(|e(k)| - \delta)\operatorname{sign} e(k); \quad (10)$$

$$P(k) = \lambda^{-1}(P(k-1) - \frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)P(k-1)}{\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(1 - \frac{\delta}{|e(k)|})); \quad (11)$$

$$\lambda \in (0,1];$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1, |e(k) > \delta \quad \text{или } \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1) = 0; \\ 0, |e(k) \le \delta, \end{cases} \quad (12)$$

где $e(k)$ определяется соотношением (9),

$$e(k)=y(k)-\hat{\Theta}^T(k-1)\psi(k-1).$$

В ситуации, когда $|e(k)|>\delta$ и значение $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$ близко к нулю, возникает режим неустойчивости, поскольку компоненты вектора

$$P(k-1)\psi(k-1)(\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))^{-1}$$

могут неограниченно возрастать. Кроме того, в случае, когда $\alpha(k)=0$, невозможно гарантировать выполнение условия $|e(k)|\le\delta$ в предположении, что $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$ ограничено.

Модифицированный алгоритм идентификации и оценивание его сходимости. Объединяя достоинства рассмотренных процедур, можно ввести комбинированный алгоритм, являющийся своеобразной комбинацией рекуррентного МНК и процедур (6) – (8) и (10) – (12).

Рассмотрим алгоритм вида

$$\hat{\Theta}(k)=\hat{\Theta}(k-1)+\frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(\mathrm{k}-1)P(k-1)\psi(k-1)}(|e(k)|-\delta)\mathrm{sign}\,e(k); \tag{13}$$

$$P(k)=P(k-1)-\frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)P(k-1)}{|e(k)|+(2|e(k)-\delta)\psi^T(k)\mathrm{P}(k-1)\psi(k-1)}(\left|\ e(k)\right|\ -\delta); \tag{14}$$

$$\alpha(k)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad |e(k)|>\delta,\\ 0, & \text{если} \quad |e(k)|\le\delta.\end{cases} \tag{15}$$

где $e(k)$ определяется в соответствии с (9) и проанализируем его сходимость.

Введем в рассмотрение вектор уклонений оценок от истинных значений параметров

$$\tilde{\Theta}(k)=\Theta-\hat{\Theta}(k)$$

и функцию Ляпунова

$$V(k)=\tilde{\Theta}^T(k)P^{-1}(k)\tilde{\Theta}(k).$$

Объединяя (4) с (13) – (15), получаем

$$\begin{aligned}V(k)=V(k=1)+\frac{\alpha(k)(|e(k)|-\delta)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))\,|e(k)|}\times\\ \times(\Delta w^2(k)-\frac{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))\,|e(k)|^3}{|e(k)+(2|e(k)|-\delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}).\end{aligned} \tag{16}$$

С учетом ранее введенного условия $w \in D(0, \delta)$ несложно переписать (16) в виде неравенства

$$V(k) \le V(k-1) + \frac{\alpha(k)(\left|e(k)\right| - \delta)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))\,|e(k)|} \times$$

$$\times (\delta^2 - \frac{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))\,|e(k)|^3}{|e(k)| + (2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}) =$$

$$= V(k-1) - \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))\,|e(k)|} \times$$

$$\times \frac{(|e(k)|^3 - 2|e(k)|\delta^2 + \delta^3)(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)) + (|e(k)| - \delta)\delta^2}{|e(k)| + (2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} \le$$

$$\le V(k-1) - \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)(|e(k)|^3 - 2|e(k)|\delta^2 + \delta^3)}{(|e(k)| + 2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)\,|e(k)|} \quad ,$$

которое справедливо в случае $|e(k)| \ge \delta$. Кроме того, поскольку в этом случае

$$e^2(k) - 2\delta^2 + \frac{\delta^3}{|e(k)|} \ge |e(k)|(|e(k)| - \delta),$$

несложно видеть, что

$$V(k) \le V(k-1) - \frac{\alpha(k)(|e(k)|(|e(k)| - \delta)^2}{2(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}, \tag{17}$$

откуда

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)^2}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} = 0, \tag{18}$$

что свидетельствует о критериальной сходимости алгоритма (13) – (15).

Перенеся в левую часть (13) $\hat{\Theta}(k-1)$ и возведя обе части полученного выражения в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \Theta(k) - \hat{\Theta}(k-1) \right\|^2_{V(k)} &= \frac{\alpha(k)\psi^T(k-1)P^2(k-1)\psi(k-1)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))^2}(|e(\mathrm{k})| - \delta^2) \le \\ &\le \frac{\alpha(k)\lambda_{\max}(P(k-1))}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(|e(k)| - \delta^2), \end{aligned} \tag{19}$$

где $\lambda_{\max}(P(k-1))$ – максимальное собственное значение матрицы $P(k-1)$.

Из (14) очевидно следует условие

$$\lambda_{\max}(P(k)) \le \lambda_{\max}(P(k-1)) \le \ldots \le \lambda_{\max}(P(0)),$$

позволяющее переписать (19) в виде

$$\left\| \hat{\Theta}(k) - \hat{\Theta}(k-1) \right\|^2_{V(k)} \le \alpha(k)\lambda_{\max}(P(0)) \frac{(|e(k)|-\delta)^2}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)},$$

который вместе с выражением (18) свидетельствует об аргументной сходимости алгоритма.

Далее, используя лемму об обращении матриц, запишем

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \frac{\alpha(k)\psi(k-1)\psi^T(k-1)}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(1-\frac{\delta}{|e(k)|}),$$

откуда следует неравенство

$$\lambda_{\min}(P^{-1}(k)) \ge \lambda_{\min}(P^{-1}(k-1)) \ge \ldots \ge \lambda_{\min}(P^{-1}(0)),$$

где $\lambda_{\min}(P^{-1}(k))$ – минимальное собственное значение матрицы $P^{-1}(k)$.

Это неравенство совместно с (17) приводит к тому, что

$$V(k) \le V(0)$$

и

$$\lambda_{\min}(P^{-1}(0)) \left\| \tilde{\Theta}(k) \right\|^2_{V(k)} \le \lambda_{\max}(P^{-1}(k) \left\| \tilde{\Theta}(0) \right\|^2_{V(k)},$$

откуда можно записать выражение

$$\left\| \tilde{\Theta}(k) \right\|^2_{V(k)} \le \frac{\lambda_{\max}(P^{-1}(k))}{\lambda_{\min}(P^{-1}(0))} \left\| \tilde{\Theta}(0) \right\|^2_{V(k)},$$

определяющее скорость сходимости введенного алгоритма.

Выводы. В работе предложена модификация рекуррентного МНК, обладающая супремальными свойствами. Так как основой данного алгоритма является рекуррентный МНК, трудностей с его практической реализацией не возникает. Полученная оценка скорости сходимости предложенного алгоритма свидетельствует о том, что эта скорость в значительной мере определяется свойствами ковариационной матрицы наблюдений $P^{-1}(k)$ соотношением ее максимального и минимального собственных чисел). Кроме того, входящая в алгоритм величина δ зачастую известна лишь приближенно, поэтому необходимо в процессе идентификации осуществлять оценивание (уточнение) этой величины и подставлять полученные оценки в алгоритм идентификации.

Список литературы: **1**.*1sermann R*. Practical aspects of process identification // Automatica. – 1980. – 16. – P. 575–597. **2.** *Evans R. J., Betz R. E*. New results and applications of adaptive control to classes of nonlinear systems // Ricerche di Automatica. – 1982. – 13. – № 2. – P. 277–297. **3.** *Tsypkin Y. Z*. The theory of adaptive and learning systems // Cybern.: Theory and Appl. – Washington, D. C., 1983. – P. 59–89. **4.** *Astr6m K. J*. Theory and Applications of adaptive control – a survey // Automica, 1983. – 19. – № 5. – P. 471–486. **5.** *Цыпкин Я. З., Кельманс Г. К*. Дискретные адаптивные системы управления // Итоги науки и техники. Техн. кибернетика. – Т. 17. – М.: ВИНИТИ, 1984. – С. 3–73. **6.** *Navendra K. S., Annaswamy A. M*. Recent trends in adaptive control theory // J. Soc. Instrum. and Control Eng. – 1984. – 23. – № 5. – P. 27–34. **7.** *Kumar P. R.* A survey of some results in stochastic adaptive control // SIAM J. Control and Optim. – 1985. – 23. – № 3. – P. 329–380. **8.** *Unbehauen H*. Theory and application of adaptive control // Proc. 7th IFAC/ IMACS Conf. – Vienna. – 1985. – P. 1–17. **9.** *Иванов В. А., Шапировский М. Р*. Адаптивные системы управления с моделями // Итоги науки и техники. Техн. кибернетика. – Т. 18. – М.: ВИНИТИ, 1986. – С. 210–240. **10.** *King-Sun Fu*. Learning control systems – Review and outlook // IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intel. – 1986. – 8.– № 3. – P. 327–342. **11.** *De Keyser R. M*. C. Applying adaptive control problems and solutions // Journal A. – 1986. – 27. – № 3. – P. 111–119. **12.** *Martin Sanchez J. M*. Adaptive control for time – variant processes // Int. J. Contr. – 1986. – 44. – № 2. – P. 315–329. **13.** *Кунцевич В.М.* Адаптивное управление: алгоритмы, системы, применение. – К.: Выща шк., 1988. – 64 с. **14.** *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с. **15.** *Романенко В. Д., Игнатенко Б. В.* Адаптивное управление технологическими процессами на базе микроЭВМ. – К.: Выща шк., 1990. – 334 с. **16.** *Astr6m K.* J., *Wittenmark B.* On self-tuning regulators // Automatica. – 1973. – 9. – P.185–199. **17.** *Clarke D. W., Gawthrop P.* J. Self-tuning controller // Proc. IEE. – 1975. – 122. – P. 929–934. **18.** *Wellstead P. E., Edmunds M. J., Prager D., Zanker P*. Self-tuningpole / zero assignment regulators // Int. J. Contr. – 1979. – 30. – № 1. – P. 1–26. **19.** *Wellstead P. E., Prager D., Zanker* P. Pole assignment self-tuning regulator // Proc. DEE. – 1979. – 126. – D. – P. 781–787. **20.** *Astrom K. J., Wittenmark B.* Self-tuning controllers based on pole-zero placement // Proc. IEE. – 1980. – 127. – D. – P. 120–130. **21.** *Kreisselmeier G., Narendra K. S*. Stable MRAC in the presence of bounded disturbances // IEEE Trans. on Autom. Contr. – 1982. – 27. – P. 1169–1175. **22.** *Clarke D. W., Mohtadi C., Tuffs P. S*. Generalized predictive control. Tue basis algorithm // Automatica. – 1987. – 22. – № 2. – P. 137–148. **23.** *Samson C*. Stability analysis of adaptively controlled systems subject to bounded disturbances // Automatica. – 1983. – 19. – P. 81–89. **24.** *Narendra K. S., Annaswamy A. M*. Robust adaptive control in the presence of bounded disturbances // IEEE Trans. on Autom. Contr. – 1986. – 31. – № 4. – P. 306–315. **25.** *0rtega R., Lozano-Leal R.* A note on direct adaptive control of systems with bounded disturbances // Automatica. – 1987. – 23. – № 2. – P. 253–254. **26.** *Fogel E., Huang Y. F*. On the value of information in system identification – bounded noise case // Automatica. – 1982. – 18. – № 2. – P. 229–238. **27.** *Lozano-Leal R., Ortega R*. Reformulation of the parameter identification problem for system with bounded disturbances // Automatica. – 1987. – 23. – № 2. – P. 245–257. **28.** *Canudas de Wit C.C., Carrilo J*. A modified EW – RLS algorithm for systems with bounded disturbances // Automatica. – 1990. – 26. – P. 599–606. 29. *Фомин В. Н*. Математическая теория обучаемых опознающих систем. – Л.: Изд. ЛГУ, 1976. – 235 с.

Поступила в редакцию 17.04.04