

В.В. УСИК, ХНУРЭ (г. Харьков),

Р.Б. СЛОБОДСКОЙ, канд. техн. наук, ХНУРЭ (г. Харьков)

О ВОЗМОЖНОЙ МОДЕЛИ ТЕЛА ПОЗВОНКА С УЧЕТОМ ЕГО ГЕОМЕТРИИ

У статті розглянуті етапи створення математичної моделі тіла хребця поперекового відділу хребта. Запропонована імітаційна структурна модель (вектор ознак), який відображає геометрію тіла хребця, приведен опис, визначення та діапазон значень усіх параметрів, що належать вектору ознак, а також запропонована аналітична модель тіла хребця, яка дозволяє математично описати форму тіла хребця.

The possible ways for creating the mathematical models the vertebra bodies of lumbar spinal departments was considered in this article. In this article was offered the imitating structural model, which show the bodies geometry. The expositions, definitions and values ranges of all parameters are reduced, and also the analytical model is offered to describe the form of the vertebra bodies.

Постановка проблеми. Создание модели позвонка позволило бы:

- во-первых, повысить точность диагностики изменений тел позвонков, произошедших в результате заболевания или травмы;
- во-вторых, дать возможность предсказания специалистом хода развития болезни;
- в-третьих, изучать реакцию на проводимые лечебные мероприятия.

Анализ литературы. Известно [1, 2], что создаваемые модели подразделяются на:

- вещественные – макеты, установки, устройства и т.д.;
- символические, в которых построение и описание объекта делают с использованием языка.

Символические модели подразделяются на:

- словесно-описательные, представляющие собой различного рода задания, документации и т.д.
- математические, представляющие собой математические зависимости, отражающие характеристики изучаемого объекта.

При решении ряда задач применяются имитационные математические модели, отражающие только структурные (в частности, геометрические) свойства объекта.

Задача создания макета, моделирующего позвоночный сегмент для исследований, является очень сложной, так как процессы, протекающие в позвоночном сегменте, сложны, и многообразны и иногда недостаточно изучены. В силу приведенных причин представлялось целесообразным построение символической модели тела позвонка.

Структурные модели, в свою очередь, могут выражать возможное расположение элементов в факторном пространстве.

Использование структурных моделей целесообразно в тех случаях, когда при изучении не учитываются особенности физических процессов, протекаемых в объекте.

Известно, что в результате различного рода заболеваний или произошедшей травмы, происходит изменение межпозвоночного диска, что в свою очередь влечет за собой изменение формы тела позвонка – наблюдается деформация (появляются костные разрастания, грыжи, уплощение тела позвонка и т.д.) [3, 4]. Изменение формы влечет за собой изменения геометрических параметров тела позвонка. В тоже время, справедливо обратное: изменение геометрических параметров тела позвонка (например при различного рода травмах) обязательно приведет к изменению формы не только межпозвоночного диска, но и формы тела позвонка.

Цель статьи. Описание этапов создания модели тела позвонка, которая позволила бы исследовать влияние различных геометрических параметров формы тела позвонка без учета физических процессов, протекаемых в позвоночном сегменте.

Разработка математической модели позвонка.

Особый интерес представляет задача создания математической модели, которая, с одной стороны, давала бы возможность исследовать геометрические параметры тела позвонка, а с другой стороны, позволила бы исследовать изменение формы тела позвонка.

Задачу создания математической модели тела позвонка можно разбить на две подзадачи:

- 1) создание имитационной (структурной) модели позвонка, отражающей геометрию тел позвонков и представляющей собой вектор признаков;
- 2) создание аналитической модели в виде алгебраических, дифференциальных, или разностных уравнений, отражающих форму тела позвонка.

Разработка структурной модели тела позвонка включает в себя решение двух задач:

- 1) исследования величин и влияния различных угловых и линейных параметров на форму позвонка;
- 2) получение вектора признаков, который определил бы принадлежность исследуемого объекта (позвонка) к некоторому классу.

В зоне пораженного сегмента позвоночника специалист обращает внимание на клиновидность позвонков, угол наклона клина, длину и высоту тел позвонков, а при исследовании нарушений формы тела позвонка, на переднюю поверхность тел пораженных позвонков (ровная, вдавленная и

т.д.), изменение замыкательных пластин (волнистая, узелки Шморля и т.д.), признаки остеохондроза и остеопороза.

Анализ зарубежной литературы, а также использование геометрического подхода позволили построить схему признаков, характеризующих геометрию тела позвонка рис. 1, а также определить вектор признаков.

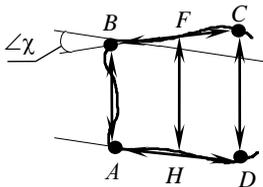


Рис.1. Схема определения вектора признаков, характеризующих геометрию тела позвонка

Полученный вектор признаков имеет следующий вид

$$\{AB, BC, AD, CD, FH, \frac{CD}{AB}, \frac{FH}{AB}, \angle\chi\},$$

где AB – высота тела позвонка у переднего края;

BC – ширина тела позвонка в области верхней замыкательной пластины;

AD – ширина тела позвонка в области нижней замыкательной пластины;

CD – высота тела позвонка у заднего края;

FH – высота тела позвонка в центре;

$\frac{CD}{AB}$ – индекс клиновидности позвонка;

$\frac{FH}{AB}$ – индекс тела поясничного позвонка;

$\angle\chi$ – угол клиновидности позвонка.

В табл. 1 представлены значения параметров AB , BC , AD , CD , FH и $\angle\chi$ для тел позвонков поясничного отдела позвоночника.

Граничные значения для индекса клиновидности позвонка и индекса тела поясничного позвонка:

$$0,8 \leq \frac{CD}{AB} \leq 1,2$$

и

$$0,8 \leq \frac{FH}{AB} \leq 1,2.$$

Полученные значения параметров и ограничения являются нормой для позвонков $L_1 - L_4$ поясничного отдела позвоночника, что имеет практическую ценность в диагностике, а именно, отклонение любого из параметров от

нормы дает возможность специалисту утверждать о наличии изменения геометрии тела позвонка в результате заболевания или перенесенной травмы и, как следствие, последующее изменение формы тела позвонка.

Таблица 1

Диапазон изменения параметров, входящих в математическую модель

Символ	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
AB	25.4 ± 2.2	27.1 ± 2.0	27.9 ± 2.1	27.4 ± 2.2	28.3 ± 2.1
BC	33.5 ± 2.8	34.4 ± 2.9	34.7 ± 2.7	34.3 ± 2.7	34.2 ± 2.7
AD	34.1 ± 2.9	34.7 ± 3.0	34.6 ± 2.8	34.9 ± 2.8	33.9 ± 2.7
CD	27.1 ± 2.1	28.0 ± 2.1	27.9 ± 2.1	27.1 ± 2.3	25.7 ± 2.5
FH	26.5 ± 2.8	27.6 ± 2.0	26.3 ± 3.5	27.0 ± 2.2	26.7 ± 2.5
$\angle \chi$	21 ± 19	14 ± 3	17 ± 5	14 ± 4	20 ± 6

Разработка аналитической модели тела позвонка связана с применением автоматизированной системы обработки рентгенограмм поясничного отдела позвонка [5], которая позволяет получить координатную информацию о контуре тела позвонка (рис. 2).

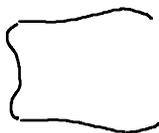


Рис. 2. Координатная информация о контуре тела позвонка

Однако, контур тела позвонка представляет достаточно сложную для описания кривую, а это означает, что исходную координатную информацию целесообразней преобразовать в форму, удобную для математического описания. Такое преобразование можно осуществить с помощью алгоритма [6, 7], позволяющего преобразовать координатную информацию о контуре тела позвонка в некую функциональную зависимость, представляющую собой дискретный массив из N равноотстоящих отсчетов с интервалом дискретности Δt (рис. 3).

Для аналитического описания математических моделей используют нелинейные математические структуры – степенные полиномы. При наличии точных данных о входных и выходных величинах для расчета коэффициентов степенного полинома применяются методы интерполирования или аппроксимирования.

В качестве аппроксимирующего многочлена был выбран многочлен вида [8]:

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$$

Анализ позволил выделить три области для аппроксимации (рис. 4), а значит применить три аппроксимирующих многочлена. График каждой из трех областей приближенно соответствует параболе второго порядка. Таким образом получаем аппроксимирующий многочлен второго порядка ($m = 2$) $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ для каждой из частей графика.

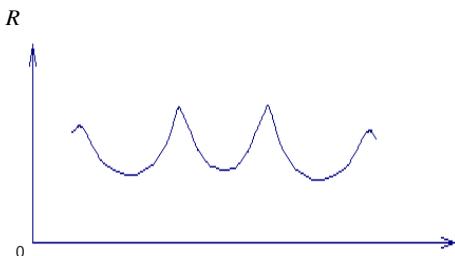


Рис. 3. График развертки контура тела позвонка

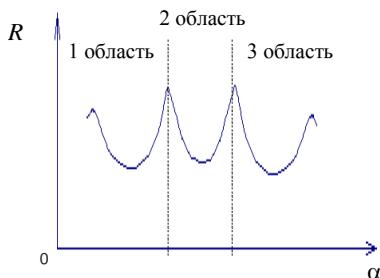


Рис. 4. Выделение областей для аппроксимации

Следовательно, аппроксимацию развертки тела позвонка проводим тремя многочленами второй степени, каждый из которых аппроксимирует соответствующую часть графика.

Так как по оси X графика развертки тела позвонка откладывается угол наклона радиуса-вектора, а по оси Y – величина радиуса-вектора, то в дальнейших описаниях будут применяться обозначения координат (α_i, R_i) вместо (x_i, y_i) .

В качестве исходных данных для получения аппроксимирующего многочлена выбираются следующие значения (рис. 5):

- 1) $(\alpha_1, R_1), (\alpha_2, R_2), (\alpha_3, R_3)$ для первой области графика;
- 2) $(\alpha_3, R_3), (\alpha_4, R_4), (\alpha_5, R_5)$ для второй области графика;
- 3) $(\alpha_5, R_5), (\alpha_6, R_6), (\alpha_7, R_7)$ для третьей области графика.

Для каждой из областей был записан аппроксимирующий многочлен, и таким образом, система из трех многочленов дает возможность аналитически описать весь график развертки тела позвонка:

$$\begin{cases} P_2^{(1)}(\alpha) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}\alpha + a_2^{(1)}\alpha^2, \\ P_2^{(2)}(\alpha) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}\alpha + a_2^{(2)}\alpha^2, \\ P_2^{(3)}(\alpha) = a_0^{(3)} + a_1^{(3)}\alpha + a_2^{(3)}\alpha^2. \end{cases}$$

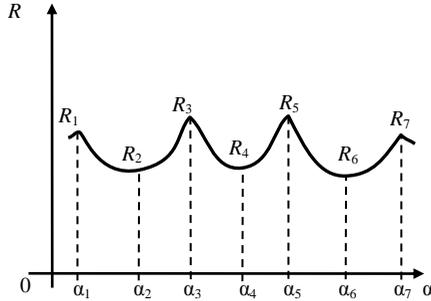


Рис. 5. Схема определения исходных данных для решения задачи аппроксимации

Нахождение параметров a_0 , a_1 , a_2 для каждого из многочленов осуществляется с помощью метода наименьших квадратов.

Выводы. Предложена математическая модель (вектор признаков), позволяющая исследовать изменение геометрии тела позвонка. Проведено описание и определение всех параметров и диапазонов значений, входящих в вектор признаков переменных. Проведен анализ и выбор степенных многочленов, позволяющих аппроксимировать график развертки тела позвонка с целью получения аналитического описания контура тела позвонка

Список литературы: 1. Беллман Р. Математические методы в медицине // Под ред. Белых А.М. – М.: Мир, 1987. – 200 с. 2. Кант В.И. Математические методы и моделирование в здравоохранении. – М.: Медицина, 1987. – 224 с. 3. Филиппович Н.Ф. Дифференциальная диагностика спондилографических изменений у больных с хронической артериальной недостаточностью нижних конечностей и поясничным остеохондрозом с корешковым синдромом // Периферическая нервная система. – 1983. – Вып. 6. 4. Стрелкова Н.И., Жарков П.Л. Неврологические и рентгенологические аспекты остеохондроза и дискоза (хондроза) позвоночника // Журнал невропатологии и психиатрии им. С.С.Корсакова. – М.: Медицина. – 1984. – Т. 84. – Вып. 4. 5. Усик В.В., Слободской Р.Б. Программная реализация способа автоматизированной обработки спондилограмм // Вестник Национального технического университета "ХПИ", 2001. – Выпуск 4. – С. 265–268. 6. Слободской Р.Б., Усик В.В. Способ оценки степени отличия форм биообъектов // Сборник научн. трудов 5 междунар. конф. "Теория и техника передачи, приема и обработки информации". – Харьков, Гуапсе: ХГТУРЭ, 1999. – С. 207–209. 7. Усик В.В., Слободской Р.Б. Обработка данных рентгенографического анализа при диагностике заболеваний поясничного отдела позвоночника // Системный анализ, управление и информационные технологии: Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Сборник научных трудов. – Выпуск 99. – Харьков: ХГПУ, 2000. – С. 166–171. 8. Бородин Л.И., Герасимович А.И. и др. Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики. – Мн.: Вышш. школа, 1986. – С. 189.

Поступила в редакцию 01.04.04