УДК 539.3

Назаренко С.А., Симсон Э.А.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Интенсификация рабочих процессов в современных машинах, подвергающихся воздействию тепловых, гидроаэромеханических, электромагнитных и других полей, обуславливают необходимость высокого уровня интеграции наукоемких технологий виртуального моделирования (Virtual Product Development)[1-8]. Необходимость комплексного моделирования сложных составных конструкций, создания достоверной цифровой модели прототипов и проведения виртуальных испытаний, приближенных к условиям эксплуатации; внутренняя логика интеграции различных научных дисциплин определяют потребность в создании совершенных моделей машин, обладающих высоким уровнем адекватности реальным объектам и процессам[1-4]. При разработке современных машин привлекаются специалисты из различных областей знаний, которые сталкиваются с необходимостью проведения больших объемов расчетных и экспериментальных работ по отработке функционирования многих модификаций изделий в различных эксплуатационных режимах[5-8]. Это стало возможно благодаря увеличению вычислительной мощности компьютеров, повышению эффективности вычислений (за счет сетевых Internet-технологий, многопроцессорности и параллелизации) [4-7].

Цель настоящего исследования заключалась в разработке на единой комплексной научно-методологической базе формализованных математических моделей для некоторых элементов машин в условиях действия физических полей различной природы и внешней среды. При выполнении процессов моделирования, наиболее полно приближенных к реальным условиям работы объекта, была предпринята попытка свести различные по физической природе процессы к единой унифицированной схеме анализа с использованием повторяемых и отлаженных этапов. Основное внимание уделялось оценкам влияния степени специфической связанности в системе на получаемые решения при достаточно больших размерностях векторов переменных состояния и проектирования. Процесс декомпозиции физико-механической модели на компоненты является плохо формализуемым творческим процессом. На базе методов и принципов системного и объектно-ориентированного анализа можно осуществить декомпозицию абстрактной модели на составляющие и связи между ними, а также реализовать их формальное описание. От правильности выбранной стратегии зависит эффективность и точность решения. При численной реализации задач могут потребоваться значительные ресурсы памяти и большие затраты машинного времени нескольких компьютеров параллельно, при этом необходимо реализовать кластерный подход и взаимодействие через высокоскоростные Интернет соединения. Причем модули сетевого взаимодействия, как и большинство остальных модулей, должны быть заменяемыми.

Современные машины создаются и функционируют как комбинация множества взаимодействующих между собой и с внешней средой конструктивных элементов. Для адекватного моделирования конструкций их расчетные схемы нуждаются в представлении уточненными математическими моделями с взаимодействующими элементами разной мерности многокомпонентной структуры и сложной формы в условиях действия внешних полей разной физической природы. Задача анализа, как правило, сводится к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных. Обобщенное уравнение движения различных математических моделей элементов машин (от одномерной до трехмерной) запишем следующим образом

$$A\left[\vec{V}\right]+D\left[\vec{V}\right]+C\left[\vec{V}\right]-\vec{f}=0,$$

где $\vec{x}$ - координатный вектор, $\vec{V}(\vec{x},t)$ - обобщенный вектор перемещений, A - оператор приведенных «жесткостных» характеристик; D - приведенный «инерционный» оператор; t - время. Конкретный вид оператора диссипативных сил C зависит от принятой модели трения: линейной, амплитудно- и частотно- независимой, амплитудно-зависимой гистерезисной. Структуру уравнений определяет тип исследуемого процесса, состав системы, граничные условия, нагрузки и условия сопряжения. Для упругого тела можно записать $A\left[\vec{V}\right]=K\vec{V}$, $D\left[\vec{V}\right]=M\dfrac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2}$, где K, M - линейные положительно определенные матричные операторы Реальные эксплуатационные режимы моделируются нагрузками $\vec{f}=\vec{f}(\vec{x},t)$, которые зависят от характера взаимодействия объекта с окружающей средой (газом, жидкостью) или с внешним полем (температурное, электромагнитное), а также от возможного контакта с другими элементами в структуре машины.

Возможности классических методов, базирующихся на решении системы уравнений в частных производных, определяющих краевые задачи математической физики, весьма ограничены. Краевая задача может быть приведена к вариационной форме. Основные разрешающие уравнения для процессов, изменяющихся во времени, могут быть непосредственно получены из обобщенного вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, составляющие которого кинетическая энергия, потенциальная энергия (является наиболее важной энергетической характеристикой, выраженной через компоненты выбранного пространства состояний и при необходимости может включать, например, энергию электрической индукции для трехмерного пьезоэлектрического тела), работа приложенных сил. Вариационные методы приводят к матричной алгебраической проблеме и служат удобной основой для построения теоретически обоснованных расчетных схем. Задачи теории поля (теплопроводность, гидромеханика, расчет электрических или магнитных полей и т.д.) сводятся к системе уравнений, аналогичной соотношениям метода конечных элементов (МКЭ) для задач механики деформируемого твердого тела, являющегося наиболее мощным, универсальным и распространенным методом расчета. При этом особую важность приобретает решение проблемы формального разложения большой сложной задачи (модели) на систему простых. Операция декомпозиции позволяет корректно выделить совокупность разрозненных подмоделей из общей модели.

- При анализе объем и сложность вычислений настолько велики, что необходимо сегментирование системы. Полная конструкция представляется в виде совокупности иерархически соподчиненных подсистем различных уровней с сохранением структур и принадлежности. Исследование всей конструкции следует базировать на независимом анализе естественно заданных субструктур, а затем связывать эти подконструкции в единую систему. Изложенный подход делает возможным изъятие из полной расчетной модели некоторой ее части, перестроение сетки и более подробный анализ для выделенной области. Это может повысить эффективность численного моделирования, так как сначала делается анализ для грубой сетки, а затем для интересующей области (подконструкции) измельчается сетка и уточняется расчет.

- С точки зрения формальной логики все многообразие расчетных физико-механических технологий элементов машин можно классифицировать следующим образом. Рассмотрим вначале двухуровневые модели процессов с учетом их взаимного влияния друг на друга, которые являются комбинацией различных по физической природе процессов и, как следствие, расчетных схем взаимодействия. Введем следующие виды степеней связанности структурных элементов системы (для примера взята стационарная конечно-элементная модель):

- последовательная (при одностороннем действии)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22}(\vec{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2(\vec{y}_1) \end{Bmatrix}; \tag{1}$$

- сильная (полная)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{Bmatrix}; \tag{2}$$

- слабая с учетом обратных связей (при двустороннем взаимодействии)

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\vec{y}_2) & 0 \\ 0 & K_{22}(\vec{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1(\vec{y}_2) \\ \vec{F}_2(\vec{y}_1) \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

где K_{11}, K_{21}, K_{22} - обобщенные матрицы жесткости; $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$ - обобщенные вектора узловых переменных состояния, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ - обобщенные вектора нагрузок. Основным отличием моделей с последовательной (слабой) степенью связанности от сильной является отсутствие недиагональных блоков в глобальных матрицах K_{21}. Недостатком моделей сильной связанности является увеличение размерности и ширины ленты системы разрешающих уравнений, преимуществом - возможность достижения решения за одну итерацию. Разбиение на подпункты носит условный методологический смысл, поскольку физический процесс может иметь комплексный и взаимовлияющий характер. Предполагается, что связь между подмоделями однозначна, алгоритмизируема и корректна. Такая трактовка дает возможность формализовать процесс и распространить традиционный инструментарий анализа и синтеза. Моделирование структурными уравнениями, ориентированными на конкретный класс объектов, может включать большое количество методов из различных областей с применением апробированных CAD/CAM/CAE-систем: ANSYS, COSMOS, NASTRAN, ACTRAN, Star CD, Fluent и т.д. Это может быть осуществлено как в ручном режиме, так и путем создания специализированных автоматизированных систем. Основная цель применения данного математического обобщения, реализуемого в едином информационном пространстве жизненного цикла изделий, заключена в повышении точности результатов, минимизации затрат времени на подготовку модели и трансляции промежуточных данных. При этом необходимо или использование единой информационной базы для всех этапов жизненного цикла, или разработка специальных процедур согласования структур данных на различных этапах.

Рассмотрим для примера колесо турбины, нагруженное тепловым потоком от выхлопных газов цилиндров ДВС [7]. Математическая модель сильной (полной) связанности (2) описывается системами уравнений в частных производных: тепломассопереноса и термоупругости в перемещениях [2]

$$c_{ij}\rho_{ij}\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+k_1\overline{U}_j\nabla T_i\right)=\nabla\left(\lambda_{ij}\nabla T_i\right)-k_2\left(3\lambda_i^*+2\mu_i^*\right)\alpha_{T_i}T_{0_i}div\frac{\partial\overline{V_i}}{\partial t}+k_3Q_i^{ИС}+Q_i^{y}$$

$$\rho_{ij}\frac{\partial^2\overline{V_i}}{\partial t^2}=\mu_i^*\nabla^2\overline{V_i}+\left(\lambda_i^*+\mu_i^*\right)\overline{grad}div\overline{V_i}-\left(3\lambda_i^*+2\mu_i^*\right)\alpha_{T_i}\overline{grad}\left(T_i-T_{0_i}\right),$$

где T_i - температурное поле деталей ДВС; $\overline{V}_i$ - векторное поле перемещений при деформациях деталей ДВС; $\overline{U}_j$ - векторное поле скоростей сред теплоносителей; ∇^2 - оператор Лапласа; $c_{ij},\rho_{ij},\lambda_{ij},\alpha_{T_i}$ - теплофизические параметры материалов (теплоёмкости, плотности, теплопроводности, коэффициент линейного расширения); T_{0_i} - номинальная температура; λ_i^*,μ_i^*- коэффициенты Ляме; $Q_i^{ИС},Q_i^{y}$ - приведенные мощности источников тепловыделяющих (хладопроизводящих) элементов; k_1,k_2,k_3 - коэффициенты (принимают значения 0 или 1), отражающие связанный характер процессов, протекающих в деталях ДВС. К системам уравнений необходимо добавить начальные и граничные условия с учётом особенностей крепления и внешнего теплообмена деталей ДВС.

Рассмотрим установившийся режим, когда температурное поле можно считать стационарным. Этот режим устанавливается при достаточно долгом прогреве после включения, постоянной внешней температуре и является основным рабочим режимом. Согласно гипотезе Дюамеля-Неймана обобщенные уравнения состояния приняты в виде тензорно-линейных соотношений:

$$\varepsilon_{ij}=A_{ijkl}\sigma_{kl}+\alpha_{ij}T,$$

где A_{ijkl}, α_{ij} – компоненты, которыми описываются особенности деформирования и температурного расширения материала, T - приращение температур, зависящее от координат. После декомпозиции, состоящей в разделении системы (модели) на подсистемы (подмодели) с сохранением структур и принадлежности одних элементов и подсистем другим, задача анализа включает в себя последовательно связанные подмодели (1):
1) задачу стационарной теплопроводности

$$\Lambda\vec{T}=\vec{Q},$$

где Λ - матрица теплопроводности, $\vec{Q}$ - вектор обобщенной тепловой нагрузки; 2) задачу термоупругости

$$K_{yy}\vec{y}_t = \vec{F}_t,$$

где K_{yy} - матрица жесткости; $\vec{y}_t$ - обобщенный вектор термоупругих перемещений; $\vec{F}_t$ - вектор нагрузок, определяемый распределением температур. Решение задачи теплопроводности определяет нагрузки для задачи термоупругости. Температурное нагружение оказывает двоякое действие: вызывает дополнительные статические напряжения, связанные с возникновением градиента температур, а также в некотором диапазоне изменяет физико-механические характеристики материала. Совместное решение задачи теплофизики и механики позволяет, с одной стороны, экономить затраты времени (например, за счет генерации единой КЭ сетки), а с другой стороны – более адекватно задавать нагрузки. Анализ проводился с использованием циклической симметрии. Температурные напряжения для колеса турбины составляют величины порядка 5...7 % напряжений от центробежных сил (рис. 1). Во многих случаях последовательная связь не только эффективнее сильной, но и более удобна, так как имеется возможность выполнять расчеты независимо.

Полная модель колеса турбины связана также с необходимостью решения задач термогазодинамики и колебаний. Задача анализа резонансного состояния колеса турбины в поле центробежных сил и тепловых нагрузок сводится к матричной проблеме

$$[K_{yy} + G(\vec{y}_s) - \lambda M_{yy}]\vec{y}_d = 0,$$

где M_{yy} - матрица масс; $G(\vec{y}_s, \vec{u})$ - матрица "геометрической" жесткости (приведенных начальных напряжений), формируемая на решении $\bar{y}_s$ статической задачи (температура + центробежные силы, рис. 2).

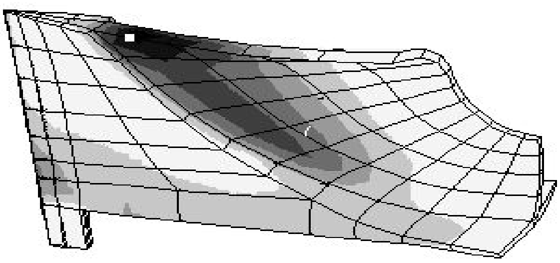

Рисунок 1 - Распределение интенсивностей статических напряжений

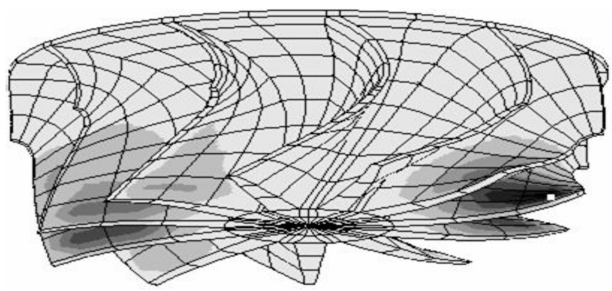

Рисунок 2 - Форма интенсивностей напряжений на 1-ой собственной частоте

Примером конструкций, для которых важен учет воздействия слабосвязанных физических полей различной природы (3), являются резонансные приборы. Особенностью таких задач является учет обратных связей (при двустороннем взаимодействии) и необходимость нескольких итераций при решении нелинейной задачи. Ультразвуковые колебания высокой интенсивности вызывают существенный разогрев системы. Соответствующая связанная нелинейная математическая модель включает стационарные уравнения теплопроводности

$$\Lambda\vec{T} = \vec{Q}\left(\vec{\sigma}\left(\vec{y}_d\right)\right);$$

в которых функция тепловых источников строится по форме резонансных динамических напряжений как доля интенсивности гистерезисных потерь, и уравнения собственных колебаний

$$\left[K_{yy}\left(\vec{T}\right) - \omega^2 M_{yy}\left(\vec{T}\right)\right]\vec{y}_d = 0,$$

включающие зависимость физико - механических характеристик и геометрии конструкции от распределения температуры. При этом выполняются итерации между различными физическими анализами до достигжения желаемого уровня сходимости. При двустороннем взаимодействии (3) в гидродинамическом анализе необходимо учесть деформации конструктивных элементов и повторить расчет параметров движения среды для новой геометрии. Общая расчетная схема может носить нестационарный характер, при этом временные шаги могут быть различными. Таким методом решаются задачи флаттера несущих поверхностей, вибраций в лопаточных машинах, искусственных сердечных клапанах и т.д.

Для случая акустического анализа, являющегося примером сильносвязанной задачи (2), конечноэлементная формулировка взаимодействия потока газа или жидкости с конструкцией при условии малости изменения средней плотности среды ρ принимает вид [2]:

$$\begin{array}{l} [K_F]\vec{p} + \left[C_F\right]\dot{\vec{p}} + [M_F]\ddot{\vec{p}} + \rho[R]\ddot{\vec{y}} = 0; \\ [K_{yy}]\vec{y} + \left[C_{yy}\right]\dot{\vec{y}} + [M_{yy}]\ddot{\vec{y}} - [R]^T\vec{p} = \vec{F}_S(t) \end{array}, \qquad (4)$$

где $[M_{yy}]$, $[C_{yy}]$, $[K_{yy}]$ - матрицы масс, демпфирования и жесткости (может включать дополнительно матрицу геометрической жесткости, зависящую от предварительного напряженного состояния, определяемого гидростатическим давлением) конструкции; $[M_F]$, $[C_F]$, $[K_F]$ - матрицы масс, демпфирования и жесткости жидкости или газообразной среды; $[R]$ - матрица взаимосвязи “давление-перемещение”, определяемая из условия совместности на границе конструкции с жидкостью; $\vec{y}$, $\dot{\vec{y}}$, $\ddot{\vec{y}}$ - векторы перемещений, скоростей и ускорений конструкции; $\vec{p}$, $\dot{\vec{p}}$, $\ddot{\vec{p}}$ - векторы узловых давлений и его производных по времени; $\vec{F}_S(t)$ - вектор, приложенных к конструкции сил.

В случае низких частот возбуждения, когда длина волны значительно превосходит характерный размер конструкции, может использоваться модель несжимаемой жидкости. Отбросив члены первого уравнения (4) равные нулю, получим следующее выражение $\vec{p} = -\rho[K_F]^{-1}[R]\ddot{\vec{y}}$. Подставив его во второе уравнение, получим обычное динамическое уравнение конструкции, в котором к $[M_{yy}]$ добавлена матрица присоединенных масс. При модальном анализе, используемом для определения собственных частот и форм колебаний конструкции и являющемся базой данных для различных видов динамического отклика (например, анализ переходных процессов), разрешающее уравнение имеет вид

$$[K_{yy}]\vec{y} - \omega^2[M_{yy}]\vec{y} - \omega^2\rho[R]^T[K_F]^{-1}[R]\vec{y} = 0$$

В ряде задач, когда граница конструкции с жидкостью варьируется, что приводит к изменению матрицы присоединенных масс жидкости, автору представляется полезным применение математического аппарата анализа чувствительности. Как показано в работе [8], градиент собственного значения (собственной частоты, критической нагрузки) имеет вид

$$\lambda'_{u_i} = \vec{y}^T [K' - \lambda M'] \vec{y} / \vec{y}^T M \vec{y}.$$

Для приближенной оценки собственных частот конструкций с малыми изменениями $\Delta\vec{u}$ от базового варианта проектных переменных $\vec{u}_0$, может использоваться быстрый пересчет $\omega \approx \omega_0 + \vec{\nabla}_u^T \omega_0 \Delta\vec{u}$.

Рассмотрим оболочечную систему гидролокации. Приемно-передающее устройство параболической формы, закрепленное в центре, под воздействием мощного негармонического импульса, возбуждаемого кольцевым электромагнитом, совершает нестационарные, быстро затухающие колебания с вязким демпфированием, обусловленным погружением в жидкость. Качество излучателя во многом определяет главный коэффициент усиления (максимальное по времени давление гидроакустической волны, создаваемое по направлению главного максимума диаграммы направленности). В случае нестационарного режима после разложения по собственным формам колебаний и использовании интеграла Дюамеля решение задачи оптимального проектирования сводится к управлению функционалом, зависящим от нескольких "резонирующих" (привлекаемых) частот и форм. На рис. 3 и 4 приведено распределение коэффициентов чувствительности собственных частот оболочки к изменению приведенных инерционных характеристик.

Операция композиции состоит в объединении нескольких подмоделей в одну. Метод композиции моделей легко обобщается на случай произвольного множества исходных моделей. После сборки, состоящей в преобразовании модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых), возможно построение многоуровневых иерархических систем. Так в случае излучателя, работающего на большой глубине в жидкости и изготовленного из пьезоактивного материала, для достижения хорошего соответствия математической модели реальному поведению конструкции необходимость учитывать и связь напряженно-деформиро-ванного и электрических полей в конструкции:

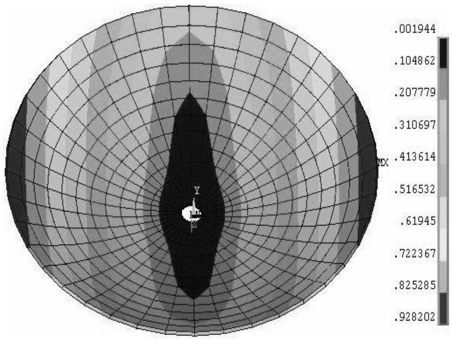

Рисунок 3 - 1я собственная частота.

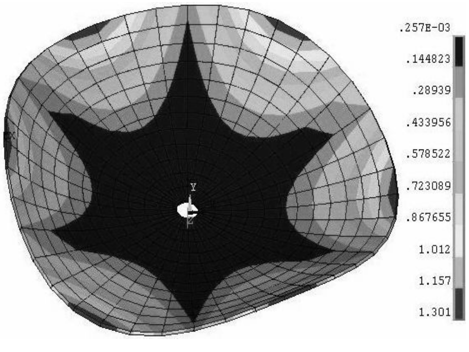

Рисунок 4 - 6-я собственная частота.

$$[K_{yy}]\vec{y}_s = \vec{F}_s;$$

$$\{[K_{yy}]+[G(y_s)]-\omega^2[M_{yy}]\}\vec{y}+[K_{y\varphi}]\vec{\varphi}-[R]^T\vec{p}=0;$$

$$[K_F]\vec{p}-\omega^2[M_F]\vec{p}-\omega^2\rho[R]\vec{y}=0;$$

$$[K_{\varphi y}]\vec{y}+[K_{\varphi\varphi}]\vec{\varphi}=0$$

где $\lfloor K_{\phi\phi}\rfloor$ - матрица диэлектрической проницаемости; $\lfloor K_{y\phi}\rfloor$ - матрица пьезоэлектрической связи; $\vec{\phi}$ - вектор потенциалов.

Данное исследование позволило провести классификацию задач анализа мультифизичных конечноэлементных моделей различной степени связанности, позволяющую построить схему для декомпозиции комплексной проблемы на ряд отдельных физических задач, и успешно апробировать разработанный математический аппарат на ряде конструкций. Анализ структуры и типов связей между отдельными задачами служит основой схемы последовательности решения общей проблемы. Использование единой расчетной модели для мультифизичного моделирования позволяет минимизировать время, обычно затрачиваемое на подготовку множества расчетных моделей, преобразование и передачу данных от одной расчетной модели в одной системе к другой модели в другой системе. Классификация может служить основой последующей унификации и стандартизации подходов. В построенной общей схеме приведены базовые принципы, которые будут использованы при дальнейших разработках математического аппарата для исследования жизненного цикла ряда современных конструкций

Литература: 1. Piegl L.A. Ten challenges in computer-aided design / L.A. Piegl - Computer-aided design. 2005. №37. pp. 461-470. 2. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общ.ред. А.Н.Гузя. - Киев: Наук.думка, 1987-1989. 3. http://www.cimdata.com/ 4. Кунву Ли. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / Ли Кунву – СПб.: Питер, 2004. – 560с. 5. Ткачук Н.А Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания / Н.А. Ткачук, Г.Д. Гриценко, А.Д. Чепурной и др. - Механіка та машинобудування. – 2006. – №1. – С.57–79. 6. Flager F Multidisciplinary process integration and design optimization of a classroom building / F Flager, B Welle, P Bansal, G Soremekun, J Haymaker - Journal of Information Technology in Construction(ITcon) (2009) Vol. 14, pg. 595-612.. 7. Двигуни внутрішнього згоряння: Серія підручників у 6 томах. / За редакцією А.П. Марченка, А.Ф. Шеховцова – Харків: Видавн. центр НТУ “ХПІ”, 2004. 8. Назаренко С.А Анализ чувствительности конечномерных и континуальных моделей структурно связанных систем / С.А Назаренко - Вестник НТУ «ХПИ». 2007. № 22. С. 127-131.

Назаренко С.О., Самсон Е.А.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ЗА НАЯВНОСТІ ДІЇ ПОЛІВ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ

Розглядаються проблемні питання, що виникають при розробці математичних моделей елементів машин з урахуванням реального характеру зовнішнього навантаження різної фізичної природи. Розроблені методи аналізу послідовно зв’язаних, сильно зв’язаних, слабо зв’язаних мультифізичних просторових скінчено-елементних моделей елементів машин з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; які орієнтовані на великі розмірності векторів перемінних стану та проектування. Досліджено обчислювальні етапи. Розглянуті приклади застосування математичного апарату.

Nazarenko S.A., Simson E.A.

THE MATHEMATICAL MODELS OF ELEMENTS MACHINE DURING MULTIPHYSICS LOADING

The complexes of theoretical, calculable and applied questions of elements machine during multiphysics loading are studied. Coupled-field analyses are useful for solving problems where the coupled interaction of phenomena from various disciplines of physical science is significant. There are basically 3 methods of coupling distinguished by the finite element formulation techniques used to develop the matrix equations. The basic requirements were stated. The common scheme of interaction between structural elements was elaborated. New schemes for solving formulated problems are proposed. Computational stages are investigated.