

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИФАЗНОГО АСИНХРОННОГО МОТОРА В ОДНОФАЗНОМУ СТАНІ

Пропонується математична модель трифазного асинхронного мотора в однофазному стані із-за відсутності конденсаторної батареї. Диференціальні рівняння електромеханічного стану записано в нормальній формі Коші. Передбачено стрибкоподібну зміну струмів в комутаційних процесах. Подаються результати комп'ютації перехідних процесів.

Предлагается математическая модель трехфазного асинхронного двигателя в однофазном режиме при отсутствии конденсаторной батареи. Дифференциальные уравнения электро механического состояния записаны в нормальной форме Коши. Предвидено скачкообразное изменение токов в коммутационных процессах. Приводятся результаты расчета на ЭВМ переходных процессов.

ВСТУП

Двофазний стан трифазного асинхронного мотора за відсутності конденсаторної батареї – достатньо частий випадок в практиці експлуатації електричних машин. Він може бути наперед передбачуваний за відсутності трифазного джерела живлення, а може бути як аварійний стан в робочому стані за трифазного живлення. Математична модель такого стану роботи мотора потрібна не тільки для безпосереднього дослідження перехідних і усталених процесів самого мотора, але над усе вона потрібна при моделюванні складних електромеханічних систем, бо це чи не єдиний адекватний підхід моделювання всеможливих несиметричних процесів у системі. В такому разі в комутаційних станах при виникненні тої чи іншої несиметрії в системі зазвичай відбувається стрибкоподібний перерозподіл струмів в обмотках електротехнічних пристроїв. Без врахування цього явища змоделювати правильно фізичний процес неможливо. Для цього в пропонованій моделі подаються відповідні формули зняття проблеми диференціювання рівнянь стану з розривними в часі функціями.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Математичну модель трифазного асинхронного мотора в однофазному стані можна одержати природно, виходячи з основних законів електротехніки за тих чи інших прийнятих в основу аналізу припущень. Але такий шлях був би порівняно трудомістким. Тому ми поступимо простіше, виходячи з відомої добре апробованої на практиці моделі трифазного стану мотора. Найзручнішою тут є L -модель у косогональних координатах [1, 2]. Не ускладнюватимемо виклад обтяжливими рівняннями квазістаціонарного електромагнетного поля, що описують поверхневі явища в обмотці ротора, і які не мають тут принципового значення. Заодно знехтуємо і явищем насичення магнетопроводу, яке в типових електромеханічних системах малопомітне. При потребі вони можуть бути враховані таким же чином, як це робиться в стандартній ситуації. За таких умов диференціальні рівняння згадуваної математичної моделі в розгорнутому вигляді приймають вигляд (об-

мотка ротора за числом витків вважається приведеною до числа витків обмотки статора) [2]:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l_s + l_m & & l_m & \\ \hline & l_s + l_m & & l_m \\ \hline l_m & & l_R + l_m & \\ \hline & l_m & & l_R + l_m \\ \hline \end{array} \frac{d}{dt} \begin{array}{|c|} \hline i_{SA} \\ \hline i_{SB} \\ \hline i_{RA} \\ \hline i_{RB} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{u_{SA} - ((2r_{SA} + r_{SC})i_{SA} + (r_{SC} - r_{SB})i_{SB})/3}{u_{SB} - ((r_{SC} - r_{SA})i_{SA} + (2r_{SB} - r_{SC})i_{SB})/3} \\ \hline - \frac{\omega(\psi_{RA} + 2\psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA}}{\omega(2\psi_{RA} + \psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB}} \\ \hline \end{array} \quad (1)$$

де i_{SA}, i_{SB} – фазні струми обмотки статора за умови, що $i_{SC} = -i_{SA} - i_{SB}$; u_{SA}, u_{SB} – фазні напруги обмотки статора; i_{RA}, i_{RB} – перетворені струми обмотки ротора; ψ_{RA}, ψ_{RB} – перетворені повні потокозчеплення обмотки ротора; ω – кутова швидкість ротора в ел.рад./с; l_m – основна індуктивність машини; l_s, l_r – індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; r_{SA}, r_{SB}, r_{SC} – резистивні опори фаз обмотки статора; r_R – еквівалентний опір обмотки ротора. Тут

$$u_{SA} = U_m \sin \omega_0 t; \quad u_{SB} = U_m \sin(\omega_0 t - 2\pi/3), \quad (2)$$

де U_m – амплітуда мережі живлення; ω_0 – її кутова частота.

Повні потокозчеплення обмотки ротора, а заодно й статора шукаємо у звичайний спосіб

$$\begin{aligned} \Psi_{Sk} (k = A, B) &= \frac{1}{\alpha_m} (i_{Sk} + i_{Rk}) + \frac{1}{\alpha_S} i_{Sk}; \\ \Psi_{Rk} (k = A, B) &= \frac{1}{\alpha_m} (i_{Sk} + i_{Rk}) + \frac{1}{\alpha_R} i_{Rk}; \end{aligned} \quad (3)$$

де $\alpha_m = 1/l_m$ – обернена основна індуктивність машини; $\alpha_S = 1/l_s$; $\alpha_R = 1/l_r$ – обернені індуктивності дисипації обмотки статора й ротора.

Якщо тепер від першого рядка рівняння (1) відняти другий і накласти умову обриву фази С: $i_{SB} = -i_{SA} = -i_s$, то одержимо рівняння електромагнетного стану мотора [2]

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_S \\ i_{RA} \\ i_{RB} \end{bmatrix} = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} \alpha_S(\alpha_R + \alpha_m) & -\alpha_S\alpha_R & \alpha_S\alpha_R \\ -\alpha_S\alpha_R & \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \left(\alpha_S\alpha_R + \frac{2\alpha_m}{T} \right) & -\frac{\alpha_S\alpha_R^2}{\alpha_R + \alpha_m} \\ \alpha_S\alpha_R & -\frac{\alpha_S\alpha_R^2}{\alpha_R + \alpha_m} & \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \left(\alpha_S\alpha_R + \frac{2\alpha_m}{T} \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})i_S \\ -u_{RA} - \omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA} \\ -u_{RB} + \omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB} \end{bmatrix}$$

де $T = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m)$ – коефіцієнт; $u_{RA} = 0$; $u_{RB} = 0$.

Рівняння електромагнетного стану мотора треба доповнити рівняннями механічного руху (штивністю і дисипацією механічних ланок, – як це прийнято в теорії електричних машин, – нехтуємо) [1, 2]

$$\frac{d\omega}{dt} = J(M_E - M) / p_0; \quad (5)$$

де M_E – електромагнетний момент; M – механічний момент; J – момент інерції; p_0 – кількість пар магнетних полюсів машини

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (i_{RA} i_{RB} - i_{RB} i_{SA}) / \alpha_m \quad (6)$$

Якщо взяти до уваги, що в однофазному стані $i_{SB} = -i_{SA} = -i_S$, то виразу (6) можемо надати простішого остаточного вигляду

$$M_E = -\sqrt{3} p_0 i_S (i_{RA} + i_{RB}) / \alpha_m. \quad (7)$$

Диференціальні рівняння (4), (5) – шукана А-модель однофазного стану трифазного асинхронно-го мотора.

Щоб узагальнити (4) на випадок урахування поверхневих явищ у обмотці ротора, достатньо в колонки вільних членів ввести напруги пазових частин обмотки ротора $-u_{RA}$, $-u_{RB}$, які знаходимо в результаті інтегрування рівнянь квазістационарного електромагнетного поля в просторі пазових частин струмопровода [2].

Так, фізичний процес у глибокому прямокутному пазу описується диференціальними рівняннями квазістационарного електромагнетного поля [1,2]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{v_0}{\gamma} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \Omega H; \quad E = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial H}{\partial z}; \quad (8)$$

$$\lambda(\lambda = H, E) = (\lambda_A, \lambda_B)_t; \quad 0 \leq z \leq h; \quad +0 \leq t \leq \infty.$$

де H , E – колонки фазних напруженостей магнетного й електричного поля в еквівалентних пазах ротора; v_0 , γ – приведені релуктивність і електропровідність провідника в пазах ротора; z – просторова координата за глибиною паза h ; Ω – матриця кутової частоти обертання ротора

$$\Omega = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Поява в диференціальному рівнянні доданка, що містить матрицю (9) пов'язано з тим, що обмотка ротора вважається приведеною за частотою до обмотки статора.

Маючи на кожному часовому кроці інтегрування значення фазних векторів напруженостей електрично-

го поля, напруги на пазових ділянках проводів, що пролягають у глибоких пазах знаходимо згідно з [2]

$$u_{RA} = E_A(0)l; \quad u_{RB} = E_B(0)l, \quad (10)$$

де $E_A(0)$, $E_B(0)$ – значення напруженостей електричного поля на поверхні паза; l – довжина паза.

Тепер сумісному інтегруванню підлягає система змішаних диференціальних рівнянь (4), (5), (8).

У випадку фігурних пазів ротора аналіз практично залишається таким самим, лише в правій частині рівнянь (8) появиться додаткова просторова координата. Користуючись рівняннями (4) для відтворення несиметрії системи, що виникає в результаті тої чи іншої комутації, необхідно враховувати узагальнені закони комутації [1, 2]

$$\Psi_S(+0) = \Psi_S(-0) = \Psi_{SA}(-0) - \Psi_{SB}(-0); \quad (11)$$

$$\Psi_{RA}(+0) = \Psi_{RA}(-0); \quad \Psi_{RB}(+0) = \Psi_{RB}(-0).$$

Праві частини рівнянь (8) знаходимо згідно з виразами (3). Ліві – виходячи з сумісного розв'язання (3), (8):

$$\Psi_S(+0) = \frac{1}{\alpha_m} (2i_S(+0) + i_{RA}(+0) - i_{RB}(+0)) + \frac{2}{\alpha_S} i_S(+0);$$

$$\Psi_{RA}(+0) = \frac{1}{\alpha_m} (i_S(+0) + i_{RA}(+0)) + \frac{1}{\alpha_R} i_{RA}(+0); \quad (12)$$

$$\Psi_{RB}(+0) = \frac{1}{\alpha_m} (-i_S(+0) + i_{RB}(+0)) + \frac{1}{\alpha_R} i_{RB}(+0);$$

Розв'язуючи (9) стосовно струмів, знаходимо покомутаційні значення струмів у момент часу $t = +0$

$$i_S(+0) = \alpha_S \frac{T}{2} ((\alpha_m + \alpha_R) \Psi_S(-0) - \alpha_R \Psi_{RA}(-0) + \alpha_R \Psi_{RB}(-0));$$

$$i_{RA}(+0) = \frac{\alpha_R}{\alpha_m + \alpha_R} (\alpha_m \Psi_{RA}(-0) - i_S(+0)); \quad (13)$$

$$i_{RB}(+0) = \frac{\alpha_R}{\alpha_m + \alpha_R} (\alpha_m \Psi_{RB}(-0) + i_S(+0)).$$

Ліві частини рівнянь (12), (13) входять у структурні рівняння системи, в якій функціонує асинхронний мотор!

В задачах електроенергетики всеможливі розриви в електричному колі системи моделюються введенням достатньо великих опорів. Але такий підхід супроводжується великою штивністю диференціальних рівнянь стану, що вимагає застосування порівняно складних неявних методів числового інтегрування, а нерідко – й пошуку кореня відповідної функції (проходження струму через нуль у момент розриву), аби уникнути штучних перенапруг у місті розриву.

РЕЗУЛЬТАТИ СИМУЛЯЦІЇ

Результати сумісного розв'язання (2-5), (7), ілюструють часові залежності кутової швидкості і струму статора модельного мотора, що показані на рис. 1-2. Перший перехідний стан здійснений при нульовій початковій швидкості, а другий – при 200 рад. за с.

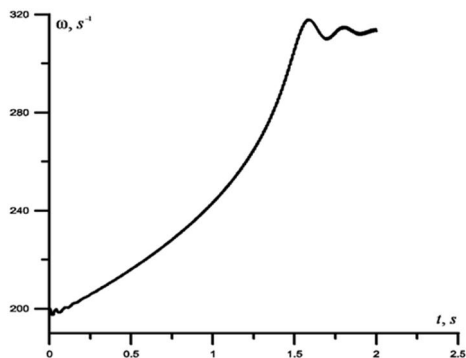


Рис. 1. Залежність $\omega = \omega(t)$ при $\omega(0) = 200\text{c}^{-1}$

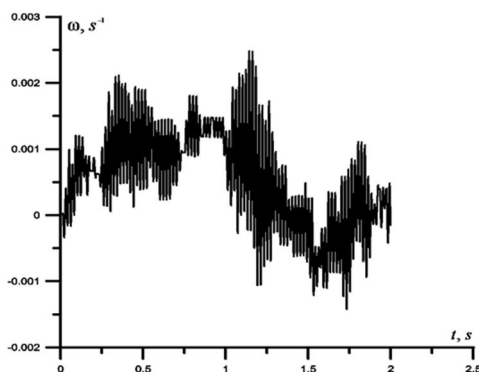


Рис. 2. Залежність $\omega = \omega(t)$ при $\omega(0) = 0$

Як бачимо, перехідний процес, що показаний на рис. 1, засвідчує успішний запуск мотора до усталеної робочої швидкості. І, навпаки, перехідний процес, що показаний на рис. 2, засвідчує, що за відсутності попереднього розгону мотора запуск є неможливий. Щоб зробити його можливим у даному випадку потрібно скористатись пусковим конденсатором. Але це тема іншого дослідження, яка тут не розглядається.

ВИСНОВКИ

1. Запропоновані рівняння однофазного стану трифазного асинхронного мотора вперше уможливають відтворювати всеможливі несиметричні стани електромеханічної системи асинхронного приводу, а заодно дають можливість аналізувати перехідні й усталені процеси роботи мотора від однофазного живлення.

2. Запропонована математична модель трифазного асинхронного мотора в однофазному стані легко адаптується на глибокопазні мотори, якщо її доповнити рівняннями квазістационарного електромагнетного поля, що описують поверхневий процес у пазовому просторі обмотки ротора.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів. – Львів, 1997. – 344 с.
2. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010. – 508 с.

Bibliography (transliterated): 1. Chaban V. Matematichne modelyuvannya elektromekhanichnih procesiv. - L'viv, 1997. - 344 s. 2. Chaban V. Matematichne modelyuvannya v elektrotehnicі. - L.: Vid-vo Tarasa Soroki, 2010. - 508 s.

Надійшла 04.01.2011

Чабан Василь Йосипович, д.т.н., проф.

Гоголь Зорана Іванівна

Національний університет "Львівська політехніка"

й Ряшівський університет

тел. 067 720-21-81

e-mail: vtchaban@polynet.lviv.ua

Tchaban V.I., Gogol Z.I.

A mathematical model of a three-phase induction motor in a single-phase state.

In the paper, a mathematical model of a three-phase induction motor without a capacitor bank in a single-phase state is introduced. Differential equations of the electromechanical state are given in normal Cauchy's form. Current jumping under commutation is taken into consideration. Results of transient process computation are given.

Key words – three phase induction motor, single-phase state, mathematical model.