

## ВИКОРИСТАННЯ ПОНЯТТЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО КОЛА ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ДЕЯКИХ ПРОБЛЕМ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

*Досліджено електричні поля, створювані статичними зарядами, розроблені інтегральні аналітичні залежності, що описують процеси даного поля, сформульоване поняття електростатичного кола і встановлені методи його розрахунку.*

*Исследованы электрические поля, создаваемые статическими зарядами, разработаны интегральные аналитические зависимости, описывающие процессы данного поля, сформулировано понятие электростатической цепи, и установлены методы её расчета.*

### ВСТУП

Джерелом електростатичних полів є струмоведучі частини діючих електроустановок. Останнім часом з'явилося декілька цікавих публікацій про вплив електростатичних зарядів на експлуатаційну надійність основного енергетичного обладнання (трансформатори, лінії електропередавання та ін.). Крім того, тривалий вплив електростатичного поля на організм людини може викликати порушення функціонального стану нервової й серцево-судинної систем, що виражається в підвищеній стомлюваності, зниженні якості виконання робочих операцій, болях в області серця, зміні кров'яного тиску й пульсу.

Деякі технологічні процеси різних виробництв, особливо з наявністю третьових частин устаткування, супроводжуються утворенням значних електричних зарядів з появою електричних потенціалів, що досягають десятків тисяч кіловольт. Такі статичні заряди небезпечні не тільки для обслуговуючого персоналу, але й можуть викликати руйнівні вибухи й пожежі.

Електризація виникає й при зіткненні двох різнорідних речовин через розходження атомних і молекулярних сил на їхній поверхні (через розходження роботи виходу електрона з матеріалів). При цьому відбувається перерозподіл електронів (у рідинах і газах ще й іонів) з утворенням на дотичних поверхнях електричних шарів із протилежними знаками електричних зарядів [1].

Отримана різниця потенціалів дотичних поверхонь залежить від ряду факторів – діелектричних властивостей матеріалів, значення їхнього взаємного тиску при зіткненні, вологості й температури поверхонь цих тіл, кліматичних умов. При наступному роз'єднанні цих тіл кожне з них зберігає свій електричний заряд, а зі збільшенням відстані між ними за рахунок чиненої роботи з поділу зарядів, різниця потенціалів зростає й може досягти десятків і сотень кіловольт.

Таким чином, дослідження електричного поля, створюваного статичними зарядами, уточнення аналітичних залежностей, що описують процеси даного поля, визначення понять електростатичного кола й методів його розрахунку, є актуальними проблемами.

Завданням дійсної роботи є дослідження електростатичного поля в речовинному середовищі, а також уточнення аналітичних залежностей, що описують процеси даного поля, визначення понять електростатичного кола, методів його розрахунку і, як наслідок, підвищення ефективності функціонування електричних апаратів, машин і пристроїв, що є джерелом інтенсивного виникнення зарядів статичної електрики.

### ОСНОВНА ЧАСТИНА

Електричне поле постійного струму в провідному середовищі потенційно й підкоряється рівнянню

Лапласа поза сторонніх джерел, якщо є відсутнім вплив магнітного поля, що змінюється. Електричне поле в ізолюючих середовищах в областях не зайнятих зарядами так само задовольняє рівнянню Лапласа. В обох полях мають справу з вектором напруженості  $\mathbf{E}$ . Граничним умовам у провідних середовищах  $E_{t1} = E_{t2}$ ;  $\gamma_1 \cdot E_{n1} = \gamma_2 \cdot E_{n2}$  можуть бути зіставлені аналогічні рівняння потенційних полів в ізолюючому середовищі  $E_{t1} = E_{t2}$ ;  $\epsilon_{a1} \cdot E_{n1} = \epsilon_{a2} \cdot E_{n2}$ . З вектором щільності струму  $\boldsymbol{\delta} = \gamma \cdot \mathbf{E}$  можна зіставити вектор електричної індукції  $\mathbf{D} = \epsilon_a \cdot \mathbf{E}$  [2].

Два поля задовольняють тому самому рівнянню  $\nabla^2 \cdot \varphi = 0$  й у них виконуються тотожні граничні умови для подібних величин. Тому при однаковій конфігурації граничних поверхонь на підставі теореми про одиничність рішення можна сказати, що сукупність поверхонь рівного потенціалу й ліній потоку вектора електричної індукції  $\mathbf{D}$  або вектора щільності струму  $\boldsymbol{\delta}$  в цих двох полях буде однаковою. Причому, з потоком вектора електричної індукції  $\psi_{\text{ел}} = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$  можна

зіставити потік вектора щільності електричного струму  $I = \int_S \boldsymbol{\delta} d\mathbf{S}$ , а з діелектричною проникністю  $\epsilon_a$  ізолюючого середовища – питому провідність  $\gamma$  провідного середовища [2].

Співвідношення  $\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E}$ , що встановлює зв'язок між щільністю струму в даній точці провідного середовища й напруженістю поля в цій точці, є диференціальною формою закону Ома стаціонарного електричного поля провідного середовища [3], тому рівняння, що зв'язує вектор електричної індукції  $\mathbf{D}$  (вектор щільності потоку електричної індукції  $\Psi_{\text{ел}}$ ) і напруженість електростатичного поля  $\mathbf{E}$ , це закон Ома в диференціальній формі електростатичного поля в однорідному й ізотропному діелектричному середовищі:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}. \quad (1)$$

Що б одержати інтегральну форму запису закону Ома для діелектричних середовищ виділимо в діелектричному середовищі невеликий паралелепіпед об'ємом  $\Delta V$ . Довжина ребра паралелепіпеда  $\Delta l$ , площа поперечного перерізу  $\Delta S$  ( $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ ). Розташуємо цей паралелепіпед так, щоб напруженість поля в ньому була спрямована по ребру (рис. 1). У силу малості об'єму можна вважати, що напруженість електричного поля  $\mathbf{E}$  та сама в повному обсязі;  $\Delta l = \Delta l \cdot \mathbf{n}^0$ ,  $\Delta S = \Delta S \cdot \mathbf{n}^0$ , де  $\mathbf{n}^0$  – одиничний вектор по напрямку  $\Delta l$ ,  $\Delta S$  й  $\mathbf{E}$ . Крім того, діелектричне середовище вважаємо ідеальним, тобто усередині виділеного об'єму відсутні вільні заряди.

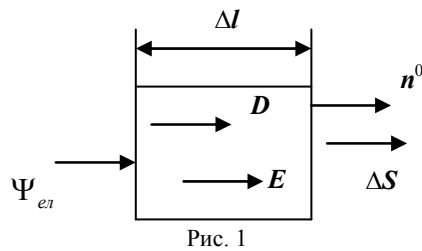


Рис. 1

Помножимо ліву й праву частину рівняння закону Ома в диференціальній формі для діелектричних середовищ на ту саму величину елементарного об'єму  $\Delta V$ :  $\mathbf{D} \cdot \Delta V = \varepsilon_a \cdot \mathbf{E} \cdot \Delta V$ , або:  $\mathbf{D} \cdot \Delta S \cdot \Delta l = \varepsilon_a \cdot \mathbf{E} \cdot \Delta S \cdot \Delta l$ . Звідки:

$$\mathbf{D} \cdot \Delta S = \frac{\varepsilon_a \cdot \Delta S \cdot n^0}{\Delta l \cdot n^0} \cdot \mathbf{E} \cdot \Delta l.$$

Але:  $\mathbf{D} \cdot \Delta S = \Psi_{\text{ел}}$  – це потік вектора електричної індукції крізь поверхню  $\Delta S$ , а  $\mathbf{E} \cdot \Delta l = U$  – напруга на елементі об'єму  $\Delta V$ ;  $\varepsilon_a \cdot \Delta S / \Delta l = C$  – ємність конденсатора, діелектриком якого є речовинне середовище виділеного елементарного об'єму  $\Delta V$ . Величина зворотна ємності конденсатора називається пружністю  $\Gamma$  [3]:

$$\Gamma = \frac{1}{C} = \frac{\Delta l}{\varepsilon_a \Delta S}.$$

Отже:

$$\Psi_{\text{ел}} = \frac{U}{\Gamma} = UC. \quad (2)$$

Отримане вираження відповідає закону Ома в інтегральній формі для діелектричних середовищ. Порівняння даного виразу з формулою закону Ома в інтегральній формі для провідних середовищ

$$I = \frac{U}{R} = Ug,$$

дозволяє зробити висновок про те, що аналогом такого параметра електричного кола провідного середовища як опір  $R$  у діелектричному колі ізолюючого середовища є пружність  $\Gamma$ .

Рівняння (2), що відповідає закону Ома в інтегральній формі для діелектричних середовищ можна одержати, якщо взяти інтеграл по об'єму від лівої й правої частини рівняння (1) закону Ома в диференціальній формі для діелектричних середовищ ( $\mathbf{D} = \varepsilon_a \cdot \mathbf{E}$ ):

$$\int_V \mathbf{D} dV = \varepsilon_a \int_V \mathbf{E} dV,$$

де:  $dV$  – суть елементарний об'єм  $\Delta V$ .

Тому що [4]:  $V = \int dV = \int_S \int_l dS dl$ , то для однорід-

них і ізотропних діелектричних середовищ:

$$\int_V \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{D} dS \int_l dl = \varepsilon_a \int_S \int_l \mathbf{E} dl dS,$$

або

$$\int_S \mathbf{D} dS = \frac{\varepsilon_a \int_S dS}{\int_l dl} \int_l \mathbf{E} dl.$$

Але  $\int_S \mathbf{D} dS = \Psi_{\text{ел}}$  – це потік вектора електричної

індукції крізь поверхню  $S = \int_S dS$ ,  $\int_l \mathbf{E} dl = U$  – напруга

на елементі об'єму  $V$ , довжина якого  $l = \int_l dl$ , а

$$\frac{\varepsilon_a \int_S dS}{\int_l dl} = \frac{\varepsilon_a S}{l} = C - \text{ємність конденсатора [5], діелек-}$$

триком якого  $\varepsilon$  діелектричне середовище даного елемента об'єму  $V$ . Отже:

$$\Psi_{\text{ел}} = CU.$$

Величиною зворотної ємності  $C$  є пружність  $\Gamma$  діелектричного середовища [3], тому закон Ома в інтегральній формі для діелектричних середовищ може бути описаний виразом:

$$\Psi_{\text{ел}} = \frac{U}{\Gamma},$$

що відповідає раніше отриманому рівнянню (2).

У тому випадку, якщо усередині виділеного об'єму діелектричного середовища є заряди, що створюють своє електростатичне поле напруженістю  $\mathbf{E}_i$ , то відповідно до принципу суперпозиції результуюча напруженість буде дорівнює геометричній сумі напруженості  $\mathbf{E}$  зовнішнього щодо виділеного об'єму даного діелектричного середовища поля й напруженості  $\mathbf{E}$  поля, створюваного зарядами даного середовища. Тому, рівнянню закону Ома в диференціальній формі для діелектричного середовища, відповідає наступне вираження:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i). \quad (3)$$

В областях, зайнятих джерелами ЕРС, крім електростатичного (кулонового) поля існує ще так зване стороннє електричне поле, обумовлене хімічними, електрохімічними, тепловими, термоелектричними процесами.

Під дією стороннього поля в джерелі здійснюється поділ електричних зарядів. Позитивні заряди розміщуються на одному полюсі джерела, а негативні – на іншому. Ці заряди в області усередині й поза джерелом створюють електричне (кулонове) поле, напруженість  $\mathbf{E}_k$  якого спрямована від позитивних зарядів до негативних. Усередині джерела кулонове поле спрямоване на зустріч сторонньому. Повне значення напруженості поля усередині джерела дорівнює  $\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_{\text{стор}}$ . При розміщенні між полюсами джерела ідеального діелектрика  $|\mathbf{E}_k| = |\mathbf{E}_{\text{стор}}|$ . Напруженість  $\mathbf{E}_k$  поля усередині джерела живлення дорівнює напруженості  $\mathbf{E}'_k$  поля поза джерелом, але спрямовані дані напруженості протилежно, отже [2]:

$$\mathbf{E}'_k = \mathbf{E}_{\text{стор}}.$$

Повне значення напруженості  $\mathbf{E}_\Sigma$  поля виділеного об'єму діелектричного середовища дорівнює геометричній сумі напруженостей зовнішнього  $\mathbf{E}$  й стороннього  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$  полів, тобто  $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}$ , тому закон Ома в диференціальній формі для ділянок діелектричного середовища, зайнятих джерелами ЕРС, записується в такий спосіб:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}).$$

Якщо усередині виділеного об'єму діелектричного середовища є провідне тіло, то під дією зовнішнього електростатичного поля вільні заряди, що входять у структуру провідника, починають рухатися. У результаті електростатичної індукції відбувається перерозподіл вільних зарядів у провідному тілі таким чином, що на поверхні провідника виникають поверхневі заряди. Усередині провідника поле вільних зарядів спрямовано на зустріч електростатичному полю діе-

лектрика й повністю його компенсує [6]. Поza провідним тілом поле, пов'язане з індукованими зарядами, накладається на зовнішнє поле й тому результуюче поле буде відрізнятися від первісного. Вектор напруженості  $E_{\Sigma}$  результуючого поля визначається геометричною сумою вектора напруженості  $E$  зовнішнього поля й вектора напруженості  $E_{\text{інд}}$  поля індукованих зарядів:

$$E_{\Sigma} = E + E_{\text{інд}}.$$

Таким чином, провідне тіло в електростатичному полі діелектрика адекватно джерелу електростатичного поля. Отже:

$$D = \varepsilon_a (E + E'), \quad (4)$$

де:  $E' = E_i + E_{\text{інд}} + E_{\text{стор}}$  – напруженість результуючого електростатичного поля діелектричного середовища, створеного вільними й зв'язаними зарядами даного середовища, індукованими зарядами провідного тіла й джерелами ЕРС.

Таким чином, джерелами електростатичного поля в діелектричному середовищі можуть бути або її вільні або зв'язані заряди, або провідне тіло, або джерела електричної енергії.

Отримане вираження (4) є узагальненим законом Ома в диференціальній формі електростатичного поля в діелектричному середовищі.

Зробивши нескладні математичні операції над диференціальною формою узагальненого закону Ома можна одержати його інтегральну форму:

$$D \Delta V = \varepsilon_a (E + E') \Delta V,$$

або:

$$D \Delta S \Delta l = \varepsilon_a (E + E') \Delta S \Delta l.$$

Звідки:

$$D \Delta S = \frac{\varepsilon_a \Delta S}{\Delta l} (E + E') \Delta l, \\ \Psi_{\text{ел}} = C(U \pm E). \quad (5)$$

Якщо від обох частин рівняння узагальненого закону Ома в диференціальній формі (4) взяти інтеграл по замкнутому контурі (рис. 2), що включає в себе й джерело електростатичного поля, з даного рівняння буде отриманий другий закон Кірхгофа в інтегральній формі для діелектричного середовища. Тому рівняння узагальненого закону Ома в диференціальній формі є також другим законом Кірхгофа в диференціальній формі для діелектричних середовищ.

На ділянці 123 замкнутого контуру є джерело електростатичного поля, що створює усередині джерела сторонню напруженість поля  $E_{\text{стор}}$ . На ділянці 341 джерел сторонньої напруженості електростатичного поля немає.

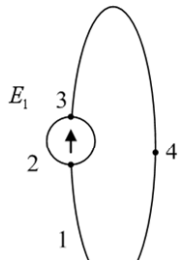


Рис. 2

Щоб одержати рівняння другого закону Кірхгофа в інтегральній формі, необхідно здійснити наступні математичні операції над рівнянням другого закону Кірхгофа в диференціальній формі для діелектричного середовища. Взяти інтеграл по об'єму від лівої і від

правої частини вищевказаного закону в диференціальній формі:

$$\int_V D dV = \int_V \varepsilon_a (E + E_{\text{стор}}) dV.$$

Інтеграл по об'єму  $\int_V dV$  можна представити по-

двійним інтегралом  $\int \oint dS dl$ , отже:

$$\int \oint dS dl = \int_S dS \oint_l \varepsilon_a (E + E_{\text{стор}}) dl.$$

Електростатичне поле розглядається в однорідному й ізотропному діелектричному середовищі, тому:

$$\int_S dS \oint_l dl = \varepsilon_a \int_S dS \oint_l (E + E_{\text{стор}}) dl.$$

Таким чином:

$$\varepsilon_a \int_S dS \\ \int_S D dS = \frac{S}{\oint_l dl} \oint_l (E + E_{\text{стор}}) dl,$$

де  $\int_S D dS = \Psi_{\text{еє}}$  – потік вектора електричного зсуву  $D$  крізь поперечний переріз замкнутого електростатичного контуру 12341 (рис. 2).

Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів. Тому:

$$\oint_l (E + E_{\text{стор}}) dl = \oint_l E dl + \oint_l E_{\text{стор}} dl.$$

Причому  $\oint_l E dl = 0$  в силу потенційного характеру кулонова поля. У свою чергу:

$$\oint_l E_{\text{стор}} dl = \int_{123} E_{\text{стор}} dl + \int_{341} E_{\text{стор}} dl.$$

Беручи до уваги, що лінійний інтеграл від сторонньої напруженості поля усередині виділеного об'єму діелектричного середовища на ділянці 123 ЕРС  $E_1$  джерела даної напруженості  $E_{\text{стор}}$ :

$$\int_{123} E_{\text{стор}} dl = E_1.$$

У той час, як на ділянці 341 немає сторонньої ЕРС і тому  $\int_{341} E_{\text{стор}} dl = 0$ . У такий спосіб:

$$\Psi_{\text{еє}} = \frac{\varepsilon_a \int_S dS}{\oint_l dl} E_1, \text{ або } \Psi_{\text{ел}} \frac{l}{\varepsilon_a \int_S dS} = E_1.$$

Для підрахунку величини  $\frac{l}{\varepsilon_a \int_S dS}$  варто врахува-

ти, що  $\oint_l dl = \int_{123} dl + \int_{341} dl$ , тому:

$$\frac{l}{\varepsilon_a \int_S dS} = \frac{\int_{123} dl}{\varepsilon_a \int_S dS} + \frac{\int_{341} dl}{\varepsilon_a \int_S dS}.$$

Тому що величина  $\frac{\int dl}{\epsilon_a \int dS} = \Gamma_1$  є пружністю

джерела електростатичного поля [3], а  $\frac{\int dl}{\epsilon_a \int dS} = \Gamma$  – пружністю ділянки 341 діелектричного середовища, отже:

$$\Psi_{\text{ел}}(\Gamma_1 + \Gamma) = E_1.$$

Отримана формула є рівнянням другого закону Кірхгофа в інтегральній формі для замкнутого контуру, зображеного на рис. 2. Таким чином, рівняння другого закону Кірхгофа в загальному виді в інтегральній формі має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n \Psi_{ek} \cdot \Gamma_k = \sum_{k=1}^n E_k. \quad (6)$$

Виділимо в діелектричному середовищі, що не містить вільних зарядів, деякий об'єм, у якому відсутні джерела електростатичного поля. Потік, що ввійшов у даний об'єм, вектора електричної індукції, створюваний стороннім джерелом електростатичного поля, повинен рівнятися потоку вектора електричного зсуву, що вийшов з його, інакше в цьому об'ємі відбувався б рух вільних електричних зарядів, що неможливо, тому що поле є електростатичним (кулоновим). Тобто:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0,$$

або:

$$\sum_{k=1}^n \Psi_{ek} = 0. \quad (7)$$

Дане вираження є першим законом Кірхгофа в інтегральній формі для електростатичного поля в діелектричному середовищі. Таким чином, алгебраїчна сума потоків електричної індукції в будь-якій точці електростатичного поля, не зайнятими джерелами цього поля, дорівнює нулю.

Якщо розділити ліву й праву частини рівняння першого закону Кірхгофа в інтегральній формі на одне й теж число (на об'єм, про який йшла вище мова, спрямувавши цей об'єм до нуля), то рівність залишається справедливою:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} / V = \text{div} \mathbf{D} = 0.$$

Таким чином, для електростатичного поля в діелектричному середовищі:

$$\text{div} \mathbf{D} = 0. \quad (8)$$

Це співвідношення є першим законом Кірхгофа в диференціальній формі для діелектричного середовища. Воно означає, що в діелектричному середовищі, у якому немає джерел електростатичного поля, немає ні джерела, ні стоку ліній вектора електричного зсуву  $\mathbf{D}$ .

По своїй природі процеси, що протікають в електростатичному полі діелектричних середовищ, і процеси стаціонарного електричного поля постійного струму провідних середовищ, різні. Проте, вони описуються одними ж законами Ома і Кірхгофа в диференціальній та інтегральній формі.

Під електричним колом розуміють сукупність пристроїв і об'єктів, що утворюють шлях для електричного струму, процеси в яких можуть бути описані за допомогою понять про електрорушійну силу, електричну напругу й електричний струм [7].

Проведений аналіз електростатичного поля в діелектричному середовищі й представлені аналітичні залежності (2), (5), (6) і (7), що описують процеси даного поля, дозволяють провести аналогію між електричним і електростатичним колом і зробити визначення поняття електростатичне коло. Електростатичне коло це сукупність пристроїв і об'єктів, що утворюють шлях для потоку вектора електричної індукції, процеси в яких можуть бути описані за допомогою понять про джерело електростатичного поля, електричну напругу й потік електричної індукції.

Всі методи розрахунку лінійного електричного кола постійного струму ґрунтуються на законах Ома й Кірхгофа в інтегральній формі, які справедливі й для електростатичного кола (вирази (2), (5), (6) і (7)).

## ВИСНОВКИ

Таким чином, для розрахунку електростатичного поля може бути використане розроблене вище поняття електростатичного кола, тобто добре відомі методи розрахунку лінійних електричних кіл постійного струму. Їхнє застосування забезпечує підвищення точності розрахунку параметрів електростатичного поля і очевидно підвищить ефективність функціонування електричних апаратів, машин і пристроїв, що є джерелом інтенсивного виникнення зарядів статичної електрики.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Боргман. Основания учения об электрических и магнитных явлениях (т. I).
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
3. Сукачев А.П. Теоретические основы электротехники. Часть I. Физические основы электротехники. – Харьков, 1959. – 460 с.
4. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 618 с.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
6. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 773 с.
7. ГОСТ 19880-74 Электротехника. Основные понятия. Термины и определения. – М.: Изд. стандартов, 1974. – 32 с.

Надійшла 30.04.2010

*Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.*  
доцент кафедри "Електротехніка та електричні машини"  
Національний технічний університет  
"Харківський політехнічний інститут"  
Україна, 61002, Харків, ул. Фрунзе 21

*Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.*  
доцент кафедри "Передача електричної енергії"  
Національний технічний університет  
"Харківський політехнічний інститут"  
Україна, 61002, Харків, ул. Фрунзе 21

*P. Ya. Pridubkov, I. V. Khomenko*

### Using the concept electrostatic circles for solving problems of electrostatics

The electrical field created by static electricity developed integrated analytical relationships describing the processes of the field, formulated the concept of electrostatic circuit and set methods for its calculation.

**Key words** – electricity, Ohm's law, Kirchoff's law, resistance of electrostatic field, electrostatic circle.