УДК 534.014.1 (09)

А. А. ЛАРИН, канд. техн. наук; НТУ «ХПИ»

ЗАРОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ В «СПОРЕ О СТРУНЕ»

В статье отражена история решения задачи о колебаниях струны. Это важнейшая задача в математической физике, оказавшая большое влияние на развитие математического анализа, а именно на понятие функции, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и разложении функции в тригонометрический ряд.

In the article the history of the problem solution about string vibrations is presented. It is the important problem in the mathematical physics. It has rendered the big influences on development of the mathematical analysis, concept of function, the theory of the differential equations in partial derivatives and decomposition of function at trigonometric series.

В XVIII в., когда зарождалась теория механических колебаний, уровень развития техники был еще достаточно низким. Тогдашние массивные, но тихоходные и маломощные машины не нуждались в проведении динамических расчетов. В связи с этим теория колебаний почти до конца XIX в. была скорее игрой ума, своего рода «полигоном», на котором отрабатывались различные подходы к постановке задач и математические методы их решения. Тем не менее, была одна сфера знаний, где теория колебаний и распространения волн нашла применение. Это акустика и теория музыки. Не случайно основополагающий труд Рэлея по теории колебаний носит название «Теория Звука» [1]. В нем Рэлей подробно изложил теорию колебаний струны, продольных, крутильных и поперечных колебаний стержней, мембран, пластин и оболочек.

В статье [2] рассматривается история возникновения и развития теории механических колебаний, но в ней речь идет в основном о дискретных системах. Однако, в теории колебаний не меньшее значение имеют континуальные системы, исследование колебаний которых базируется на теории упругости и ее практической составляющей – сопротивлении материалов. С этими задачами связано зарождение новой области анализа - дифференциальных уравнений в частных производных, при решении которых возможна значительно большая произвольность, чем при решении обыкновенных дифференциальных уравнений.

Среди задач на колебания упругих тел особое место занимает задача о поперечных колебаниях натянутой струны конечной длины, закрепленной на обоих концах. Эта задача является самой простой, но вместе с тем и самой важной задачей в акустике и теории музыки. Она также оказалась самой важной для развития теории дифференциальных уравнений, математической физики и теории колебаний. Именно вокруг нее разворачивались споры Д. Бернулли, д'Аламбера, Л. Эйлера и Лагранжа относительно природы решения дифференциальных уравнений. Задача о колебаниях струны дала толчок к развитию не только математического анализа, но и экспериментальных методов исследования. История развития этой задачи описана во многих источниках по истории механики и математики, однако зачастую сведения о ней поверхностны, а порой и противоречивые. Поэтому в данной статье мы рассмотрим историю развития задачи о колебаниях натянутой струны и ее важность для теории и практики.

В современной трактовке задача о поперечных колебаниях натянутой струны длины l сводится к нахождению решения $y(x,t)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где x – координата точки струны вдоль ее длины, а y – ее поперечное смещение. Уравнение (1) должно удовлетворять начальным условиям

$$\begin{gathered} y(0,x) = f_1(x); \\ y'_t(0,x) = f_2(x) \end{gathered} \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} y(t,0) = 0; \\ y(t,l) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Развитие теории колебаний связано с развитием теории волн, так как возникновение колебаний зачастую сопровождается волнами. Первые наблюдения за колебаниями струны и воздушного столба в трубе относятся еще к античности. Многие древние авторы, среди которых Аристотель, Евклид, Пифагор и Птолемей возникновение звука связывают с колебаниями тел. Они утверждают, что более высокому звуку соответствует бóльшая частота колебаний, а громкость звука связывается с их интенсивностью. Пифагору, в частности, приписывают открытие того факта, что высоты основных тонов двух струн находятся в соотношении, обратном соотношению их длин (при прочих равных условиях), а также того, что высота тона струны зависит от ее толщины и натяжения [3, с. 251]. Разумеется, все это были не количественные, а качественные соотношения. Томас Юнг в своих лекциях по натуральной философии (Young, Lectures on Natural Philosophy) отмечал, что уже Аристотель знал, что «труба или струна двойной длины дает звук, в котором колебания занимают вдвое большее время, и что свойства созвучий зависят от отношений времен, занимаемых колебаниями отдельных звуков» [1, с. 204]. Кроме того, законы колебаний струны были в той или иной мере известны мастерам, изготавливающим музыкальные инструменты.

В начале XVII в. в науке стали возрождаться экспериментальные методы исследования. В 1614-1618 гг. голландский математик и механик Исаак Бекман (1570-1637), изучая колебания струны, пришел к выводу об их изохронности (независимости частоты от амплитуды), мотивируя его тем, что затихание звука, связанное с уменьшением амплитуды колебаний струны не сопровождается изменением тона ее звука. Он также установил, что частота обратно пропорциональна длине струны [4, с. 35]. Исследования Бекмана не были опубликованы и стали известны только благодаря Марену Мерсенну (1588-1648), который провел обширные экспериментальные исследования и установил ряд закономерностей [1, с. 204–205].

1. Для данной струны и для данного натяжения период колебаний меняется пропорционально длине струны.

2. Когда длина струны задана, период колебания меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. Струны с одинаковым натяжением колеблются с периодами пропорциональными корню квадратному из их линейных плотностей.

Следует отметить, что законы Мерсенна иллюстрируются всеми струнными музыкальными инструментами. В 1636 г. он опубликовал свои результаты в «Книге о созвучиях» («Harmonicum libri»). Мерсенн, таким образом, обосновал применение методов экспериментальных исследований в точном естествознании. Ему также принадлежит открытие явления биений, измерение скорости звука в воздухе и, кроме того, Мерсенн предложил схему зеркального телескопа. Его вклад в развитие науки не ограничивается только упомянутыми работами. Он вел обширную переписку со многими учеными, в том числе с П. Гассенди, Г. Галилеем, Р. Декартом, К. и Х. Гюйгенсами, Б. Паскалем, Э. Торричелли, П. Ферма и др., играя роль «связующего центра».* Образовавшийся вокруг Мерсенна кружок ученых послужил основой для создания в 1666 г. Французской (Парижской) Академии наук [4, с. 321–322].

Закономерности, установленные Мерсенном экспериментально, были теоретически подтверждены учеником И. Ньютона Бруком Тейлором (1685–1731), который дал механико-геометрическую формулировку решения дифференциального уравнения малых колебаний струны. В работе «О методе приращений» (Brook Taylor, De methodo incrementorum, London, 1715) он исследует эту задачу. Тейлор рассматривает струну как систему материальных точек и принимает такие допущения: все точки струны одновременно проходят свои положения равновесия (ось x) и сила, действующая на каждую точку пропорциональна ее смещению y относительно оси x. Эти предположения означают, что он рассматривает

* В 1932-1980 гг. во Франции издано 13 томов писем Мерсенна

малые колебания, соответствующие первой собственной частоте (основной тон). По сути, Тейлор сводит задачу к системе с одной степенью свободы и пользуется решением дифференциального уравнения вида

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 . \tag{4}$$

Согласно полученным им результатов период колебаний струны на первой собственной частоте определяется по формуле

$$T_1 = 2l\sqrt{\frac{\mu}{F}} , \tag{5}$$

где l – длина струны, μ – погонная масса, F – натяжение.

Исследованиями колебаний струны занимался также Иоганн Бернулли (1667–1748). Если Тейлор не ограничивает количества материальных точек, описывающих движение струны, так как заранее устанавливает свойства их колебаний, то И. Бернулли, глубже затрагивает проблему замены сплошной кривой конечным числом материальных точек [3, с. 264]. Работы И. Бернулли опубликованы в «Commentarii» Петербургской АН за 1727–1728 гг., которые были изданы отдельным трудом в 1729–1732 гг. Именно эти работы привлекли внимание д’Аламбера, Д. Бернулли и Эйлера к проблеме колебаний струны.

Д’Аламбер в 1747 г. для данной задачи применил метод сведения задачи динамики к задаче статики (принцип д’Аламбера) и получил дифференциальное уравнение колебаний однородной струны в частных производных (1) – первое уравнение математической физики. Решение этого уравнения он искал в виде суммы двух произвольных функций [5, с. 220]

$$y = F_1(at + x) - F_2(at - x) , \tag{6}$$

где F_1 и F_2 – периодические функции периода 2l. Таким образом, функция времени y имеет период $2l/a$, что также дает теоретическое обоснование законов Мерсенна. При выяснении вопроса о виде функций F_1 и F_2 д’Аламбер учитывает граничные условия (2), предполагая, что при $t = 0$ струна совпадает с осью x. Значение же $y'_t(0,x)$ при $t = 0$ в постановке задачи не указывается.

Д’Аламбер опубликовал свои результаты в 1749 г. в третьем томе «Мемуаров Берлинской академии наук». В том же году была опубликована и первая работа Эйлера, посвященная этому вопросу. Эйлер рассматривает частный случай при котором при $t = 0$ струна отклонена от положения равновесия и отпущена без начальной скорости. Существенным является то, что Эйлер не накладывает никаких ограничений на начальную форму струны, т.е. не требует, чтобы она могла быть задана аналитически, рассматривая любую кривую, которая «может быть начерчена от руки». Окончательный результат автора такой: если при $t = 0$ форма струны описывается уравнением $y = f(x)$, то колебания выглядят так

$$y = \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2} f(x - at) . \tag{7}$$

В этой работе Эйлер пересмотрел свои взгляды на понятие функции, в отличие от прежнего представления о ней только как аналитическом выражении. Тем самым был расширен класс функций, подлежащих изучению в анализе, а Эйлер пришел к выводу о том, что «поскольку любая функция от x будет задавать некоторую линию, стало быть, и обратно, кривые линии можно сводить к функциям».

Решения, полученные д'Аламбером и Эйлером представляют закон колебаний струны в виде двух волн, бегущих навстречу друг другу. При этом они не сошлись в вопросе о виде функции, задающей линию изгиба.

Д. Бернулли в изучении колебаний струны пошел другим путем, разбивая ее на материальные точки, количество которых считал бесконечным. Он также выдвигает условия малости колебаний, на основании чего считает упругие восстанавливающие силы пропорциональными отклонениям от положений равновесия. Затем он вводит понятие простого гармонического колебания системы, т.е. такого ее движения, при котором все точки системы колеблются синхронно с одинаковой частотой, но разными амплитудами. Опыты, произведенные со звучащими телами, навели Д. Бернулли на мысль о том, что самое общее движение струны состоит в одновременном совершении всех доступных ей решений. Это так называемая суперпозиция решений (термин введен в XIX веке). Таким образом, в 1753 г., исходя из физических соображений, он получил общее решение для колебаний струны, представив его в виде суммы частных (парциальных) решений, при каждом из которых струна изгибается в виде характерной кривой.

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \sin\frac{j\pi\, x}{l} A_j \cos\frac{2j\pi\, t}{T_1} . \tag{8}$$

В этом ряду первая форма колебаний представляет собой половину синусоиды, вторая – целую синусоиду, третья состоит из трех полусинусоид и т.д. Их амплитуды $A_j \cos\frac{2j\pi\, t}{T_1}$ представляются в виде функций времени и по существу являются обобщенными координатами рассматриваемой системы. Согласно решению Д. Бернулли движение струны представляет собой бесконечный ряд гармонических колебаний с периодами

$$T_j = \frac{T_1}{j}. \qquad (9)$$

При этом количество узлов (неподвижных точек) на одно меньше номера собственной частоты. Ограничивая ряд (8) конечным числом слагаемых, мы для континуальной системы получим конечное число уравнений.

В решении Д. Бернулли содержится, однако, неточность – в нем не хватает второго слагаемого вида $B_j \sin\frac{2j\pi t}{T_1}$, т.е. не учитывается сдвиг фазы каждой гармоники колебаний. Правильнее решение записать так

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \sin\frac{j\pi x}{l} A_j \sin\left(\frac{2j\pi t}{T_1} + \varepsilon_j\right). \qquad (10)$$

Д. Бернулли, представив решение в виде тригонометрического ряда, использовал принцип суперпозиции и разложение решения по полной системе функций. Он справедливо полагал, что с помощью различных слагаемых формулы (8) можно объяснить гармонические тоны, которые струна издает одновременно со своим основным тоном [6, с. 499]. Он рассматривал это как общий закон, справедливый для любой системы тел, совершающей малые колебания. Однако физическая мотивировка не может заменить математического доказательства, которое тогда представлено не было. Из-за этого коллеги не поняли решения Д. Бернулли, хотя еще в 1737 г. К. А. Клеро [7] использовал разложение функций в ряд на интервале $[0, \pi]$.

Наличие двух различных способов решения задачи о колебаниях струны вызвал среди ведущих ученых XVIII в. бурную полемику – «спор о струне» [3, с. 266]. Этот спор главным образом касался вопросов о том, какой вид имеют допустимые решения задачи, об аналитическом представлении функции и можно ли представить произвольную функцию в виде тригонометрического ряда. В «споре о струне» получило развитие одно из самых важных понятий анализа – понятие функции.

Д'Аламбер и Эйлер были не согласны с тем, что решение (8), предложенное Д. Бернулли может быть общим. В частности, Эйлер никак не мог согласиться с тем, что ряд (8) может представлять любую «свободно начерченную кривую», как он сам теперь определял понятие функции. Оценка нового направления в математической физике, связанной с применением тригонометрических рядов дана Эйлером в работе «Освещение колебательного движения струны» («Eclarissements sur le mouvement des cordes vibrantes»), написанной в 1759 г., но опубликованной только в 1766 г. [8, с. 215]. Здесь постановка Эйлера отличается большей общностью – он предложил задать струне произвольную нерегулярную форму, а затем отпустить ее, в результате чего струна будет совершать какое-то движение.

Возникает вопрос, справится ли теория с данной задачей? Эйлер считал решение, принятое в виде тригонометрического ряда частным, а не общим.

Основоположник аналитической механики Ж. Л. Лагранж рассмотрел общий случай малых колебаний дискретной системы [6]. Введя понятие обобщенных координат, он получил дифференциальные уравнения движения в наиболее удобной форме – уравнения Лагранжа II рода [2, с. 43–44]. При этом он строго вывел теорию суммирования простых решений, которую Д. Бернулли обосновывал только с помощью частных или косвенных примеров [6, с. 458].

Лагранж, вступив в полемику, разбил струну на малые дуги одинаковой длины с массой, сосредоточенной в центре и исследовал решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом степеней свободы. Переходя затем к пределу, он получил результат, аналогичный результату Д. Бернулли, не постулируя, однако, заранее то, что общее решение должно быть бесконечной суммой частных решений. При этом он уточняет решение Д. Бернулли, приводя его в виде (10), а также выводит формулы для определения коэффициентов этого ряда [6, с. 495–500]. Хотя решение основателя аналитической механики не соответствует всем требованиям математической строгости, оно было заметным шагом вперед, а сочинение «Исследование о природе и распространении звука» (L. Lagrange. Resherches sur la nature et la propagation du son. Oeuvres de Lagrange, v. I, Paris, 1785) является одной из самых блестящих его работ [3, с. 268].

Что касается разложения решения в тригонометрический ряд, то Лагранж считал его расходящимся при произвольных начальных условиях [6, с. 499]. Спустя 40 лет, в 1807 г. Ж. Фурье (1768-1830) вновь нашел разложение функции в тригонометрический ряд в третий раз и показал, как можно этим пользоваться для решения поставленной задачи. Когда Лагранжу сообщили о полученном Фурье разложении в тригонометрический ряд даже разрывной функции, он этому открытию не поверил и попытался выставить ряд возражений [8, с. 216]. Позже, в 1826 г., Фурье в работе «Теория теплоты» («Théorie de la chaleur») уже более строго доказал разложение функции в тригонометрический ряд и подтвердил правильность решения Д. Бернулли. Это открытие явилось переломным этапом в развитии всего математического анализа. Теорему Фурье о разложении произвольной функции в ряд по тригонометрическим функциям М. В. Остроградский считал чрезвычайно важной, стоящей в ряду первейших открытий времени [9, с. 182]. Фурье также полностью использовал метод, предложенный Эйлером. Удивительно, как сам Эйлер не заметил, что таким способом может быть установлена справедливость решения Д. Бернулли [10, с. 117]. Полное аналитическое доказательство теоремы Фурье о разложении однозначной периодической функции в тригонометрический ряд было приведено в интегральном исчислении Тодгёнтера (Todhunter, Integral Caleulus) и в

«Трактате по натуральной философии» знаменитых английских физиков У. Томсона (лорд Кельвин) и П. Тэта (W. Thomson, P. G. Tait. Treatise on natural philosophy, v. I. Oxford, 1867) [1, с. 45].

Исследования свободных колебаний натянутой струны продолжались два столетия, если считать от работ Бекмана. Эта задача послужила мощным стимулом для развития математики. Логическим развитием результатов Эйлера и Фурье явилось известное определение функции Лобачевским и Лежен Дирихле, основанное на идее взаимно однозначного соответствия двух множеств. Дирихле также доказал возможность разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций. Были также заложены основы математической физики – получено одномерное волновое уравнение и установлена равноправность двух его решений, что математически подтвердило связь между колебаниями и волнами. То, что колеблющаяся струна порождает звук, натолкнуло ученых на мысль об идентичности процесса распространения звука и процесса колебания струны [11, с. 60]. Была также выявлена важнейшая роль граничных и начальных условий в подобных задачах. Для развития механики важным результатом стало применение принципа д'Аламбера для записи дифференциальных уравнений движения, а для теории колебаний эта задача также сыграла очень важную роль, а именно, был применен принцип суперпозиции и разложение решения по собственным формам колебаний, сформулированы основные понятия теории колебаний – собственная частота и форма колебаний.

Полученные для свободных колебаний струны результаты послужили основой для создания теории колебаний континуальных систем. В течении XVIII–XIX вв. были разработаны аналитические методы расчетов свободных колебаний сначала призматических стержней в трудах Д. Бернулли и Эйлера, а затем уже на основе достижений теории упругости – мембран, пластин и оболочек в основном в работах ученых французской школы. При этом теоретические результаты были проверены соответствующими экспериментами. Этим методика составления и решения дифференциальных уравнений получила подтверждение. Эти результаты имели большое значение и при создании методов решения для задач колебаний тел более сложной формы.

Список литературы: **1.** *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. I. – М., Гостехиздат, 1955. – 504 с. **2.** *Ларин А. А.* Становление теории колебаний механических систем: исторический обзор // Дослідження з історії техніки. Зб. наукових праць. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – Вип. 8. – С. 41–50 **3.** История механики с древнейших времен до конца XVIII века. – М.: Наука, 1971. – 398 с. **4.** *Боголюбов А. Н.* Математики. Механики. Биогр. справочник. – К.: Наук. думка, 1983. – 640 с. **5.** *Крылов А. Н.* Вибрация судов. Собрание трудов. Т. X. – М.:–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 402 с. **6.** *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. I – М.:–Л.: Гостехиздат, 1950. – 594 с. **7.** *Клеро К. А.* Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. – М.:– Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 220 с. **8.** История отечественной математики. С древнейших времен до конца XVIII в. Т. I. – К.: Наук. думка, 1968. – 492 с. **9.** Михаил Васильевич Остроградский. 1 января 1862 – 1 января 1962. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности // под ред.

И. Б. Погребысского и А. П. Юшкевича. – М.: Гос. изд-во физ-мат. литературы, 1961. – 399 с. **10.** Леонард Эйлер. Пер. с нем. Тиле Р. – К.: Вища школа, 1983. – 192 с. **11.** *Меркулова Н. М.* К истории газовой динамики в XIX в. // История и методология естественных наук. Вып. IX. Механика. Математика. – М.: Изд–во МГУ, 1970. – С. 59–89.

Поступила в редколлегию 16.10.07

УДК 378

Ю. М. МАЦЕВІТИЙ, докт. техн. наук, академік НАН України;
Г. Б. ОВЧАРОВА, канд. техн. наук, ***А. А ТАРЕЛІН.,*** канд. техн. наук,
Ю. Ф. ШМАЛЬКО., канд. техн. наук,
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

ПІДГОТОВКА НАУКОВИХ КАДРІВ ШЛЯХОМ ОРГАНІЗАЦІЇ НАСКРІЗНОЇ СИСТЕМИ ОСВІТИ В ІНТЕГРОВАНИХ НАУКОВО-ОСВІТНІХ СТРУКТУРАХ

У статті розглянута проблеми створення замкнутого циклу підготовки наукових кадрів на основі фізтехівської моделі: школа-університет-дослідницька інституція на прикладі діяльності Академічного науково-освітнього комплексу «Ресурс».

The article is devoted to the issues of creation of exclusive circle: high school - university - R&D institution for preparation of research and science personnel based on "physicotechnical" model with reference to experience of the Academic Science and Education Complex "Resources".

У стратегічному плані інтеграція науки й освіти, як фактор взаємодії та підвищення якості роботи різноманітних секторів економіки, є умовою створення „економіки знань”, динамічного розвитку не тільки науково-освітньої сфери, але й, у значній мірі, всього соціально-економічного комплексу України.

У таких документах, як Національна доктрина розвитку освіти (від 17 квітня 2002 р), План дій щодо забезпечення якості вищої освіти України та її інтеграції в європейське й світове освітнє співтовариство на період до 2010 року (від 13.07.2007р.), та Концепція Державної цільової програми „Наука в університетах” на 2008-2012 р. (від 18 липня 2007 р.), підкреслюється, що поєднання освіти й науки є „умовою модернізації системи освіти, головним чинником її дальшого розвитку задля забезпечення високої якості вищої освіти та професійної мобільності випускників вищих навчальних закладів на ринку праці шляхом інтеграції вищих навчальних закладів різних рівнів акредитації, наукових установ та підприємств, запровадження гнучких освітніх програм та інформаційних технологій навчання” [1]. У цих же документах підкреслюється необхідність запровадження таких освітніх програм, які б забезпечували безперервність отримання освіти, необхідність запровадження східчастого утворення, першим етапом якого є спеціалізована