

КОВАРІАНТНІСТЬ ТА ІНВАРІАНТНІСТЬ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖУ 2-го РОДУ

Морачковський О.К., Фоменко Н.О., Четверікова А.Д, Чуприніна К.Л.

Національний технічний університет

«Харківській політехнічний інститут», м. Харків

При виконанні курсових та розрахункових робіт з Теоретичної та Аналітичної механіки для спеціальності 113 “Прикладна математика” за спеціалізацією «Комп’ютерна механіка», на підставі комп’ютерних досліджень на базі програмного комплексу «КІДІМ», розглянуто динаміку руху систем тіл з однією та двома ступенями вільності. Звісно, що шляхом інтегрування рівнянь Лагранжу 2-го роду визначають зміну у часі узагальнених координат та кінематичні характеристики руху тіл системи. Система рівнянь Лагранжа при поділі діючих сил на потенціальні і не потенціальні або з використанням функції Лагранжа $L = T - \Pi$, де T – кінетична, Π – потенційна енергії, мають просту скалярну форму:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial T}{\partial q_v} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_v} + Q_v^{НП}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial L}{\partial q_v} = Q_v^{НП}, \quad v = \overline{1, s}.$$

q_v – узагальнені координати, s – кількість ступенів свободи. Ці неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку щодо q_v – узагальнених координат є критерієм, що виділяє дійсний рух механічної системи з безлічі можливих рухів, сумісних з накладеними в’язями.

Коваріантність рівнянь це їхня незмінність за формою при зміні вибору системи лагранжевих координат (узагальнених координатних функцій).

В роботі, на прикладі механічної системи, наведено доказ, того що рівняння Лагранжа не змінні за формою з вибором нових узагальнених координатних функцій – q'_j , так що:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} = 0, \quad L' = L(q(q'), \dot{q}(q', \dot{q}'), t),$$

Дійсно коли $q'_i = \alpha_i q_i, \dot{q}'_i = \alpha_i \dot{q}_i, t' = t$, $i = \overline{1, s}$, де α_i — постійні величини, в рівняннях маємо $L(q_i, \dot{q}_i, t) = L'(q'_i, \dot{q}'_i, t')$ й тому рівняння Лагранжу не змінюються.

Доведення інваріантності кількісних мір руху: кінетичні, потенційні та повні енергії, їхні похідні за часом, а також потужності та функції Релея здійснено обчислювальними розрахунками. Отримані залежності можна використовувати для встановлення дійсних значень характеристик руху, енергії, роботи та потужності сил та функції дисипації, які застосовуються при аналізі динаміки механічних систем.

Висновки. В роботі отримані результати розрахунків динаміки механічної системи тіл, які з’ясовують коваріантність та інваріантність рівнянь Лагранжа 2-го роду на підставі обчислювальних розрахунків досліджень динаміки механічної системи тіл на базі програмного комплексу «КІДІМ».