О РАСЧЕТЕ ОБЪЕМА БЕСПОВТОРНОЙ ВЫБОРКИ

[1]Кожина О.С., [2]Пигнастый О.М.

[1]Харьковский Национальный медицинский университет

[2]Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков

В случае бесповторного метода выбора элементов объема n, взятых из общей совокупности N для обследования, общее число возможных выборок определяется комбинаторной формулой $C_N^n = N!/\left((N-n)!n!\right)$. Выборочное среднее $\bar{y}_w$ случайной величины Y_w есть несмещенная оценка среднего значения $\bar{y}$ для совокупности Y:

$$M[Y_w] = \frac{\sum_{w=1}^{C_N^n} y_w}{C_N^n} = \frac{\sum_{w=1}^{C_N^n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{nC_N^n} = \frac{\sum_{w=1}^{C_N^n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{n\,N!/\left((N-n)!n!\right)}, \quad y_w = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{1}$$

Непосредственная подстановка y_w в (1) позволяет получить соотношение

$$M[Y] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \qquad M[Y] = M[Y_w]. \tag{2}$$

Дисперсия случайной величины Y_w определяется выражением

$$M\left[(Y_w - \bar{y})^2\right] = \sum_{w=1}^{C_N^n} (y_w - \bar{y})^2 \Big/ C_N^n. \tag{3}$$

Подставляя y_w в (3), запишем

$$M\left[(Y_w - \bar{y})^2\right] = \frac{N-n}{nN(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2 = \frac{N-n}{n(N-1)}D(Y) = \frac{N-n}{n(N-1)}\sigma^2(Y), \qquad D(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2, \tag{4}$$

откуда

$$\sigma^2(Y_w) = \frac{N-n}{n(N-1)}\sigma^2(Y). \tag{5}$$

Пусть вероятность неравенства $|Y_w - \bar{y}| < \Delta$ определена и равна γ

$$P\left(|Y_w - \bar{y}| < \Delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma(Y_w)}\right) = 2\Phi(t) = \gamma, \qquad \Delta = t\sigma(Y_w),\ \Phi(t) \text{–функция Лапласа.}$$

Используя (5), получим $\Delta = t\sigma(Y_w) = t\sigma(Y)\sqrt{\dfrac{N-n}{n(N-1)}}$, откуда следует

$$\Delta^2 = t^2\sigma^2(Y)\frac{N-n}{n(N-1)} \Rightarrow \Delta^2 n(N-1) = t^2\sigma^2(Y)N - t^2\sigma^2(Y)n \Rightarrow n\cdot\left(\Delta^2(N-1) + t^2\sigma^2(Y)\right) = t^2\sigma^2(Y)N,$$

$$n = \frac{t^2\sigma^2(Y)N}{\Delta^2(N-1) + t^2\sigma^2(Y)} \tag{6}$$

Если случайная величина Y имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M[Y] = p$ и дисперсией $D(Y) = \sigma^2(Y) = pq$, $p + q = 1$, то выражение (6) принимает вид:

$$n = \frac{t^2 Npq}{\Delta^2(N-1) + t^2 pq}, \qquad \text{или} \quad n = \frac{t^2 Npq}{\Delta^2 N + t^2 pq} \ \text{при} \quad N >> 1 \tag{7}$$