ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Коновалов О.Я., Максимов Д.А.
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков

Задача Коши для уравнения Лапласа, в частности, описывает распределение потенциала φ электрического поля в области над эквипотенциальной границей с потенциалом U_0, на которой задано распределение проекции вектора напряженности. Если граничная поверхность – плоскость xOz, разностная формулировка этой задачи имеет вид

$$\varphi_{i,k+1} = 2\frac{{h_x}^2 + {h_y}^2}{{h_x}^2}\varphi_{i,k} - \left(\frac{h_y}{h_x}\right)^2\left(\varphi_{i-1,k} + \varphi_{i+1,k}\right) - \varphi_{i,k-1}, \quad (1)$$

$$\varphi_{i,0}=U_0, \quad (2)$$

$$\varphi_{i,1} = U_0 - h_y \cdot E_y\Big|_{i,0}. \quad (3)$$

Где: $\varphi_{i,k}$ – сеточная функция, h_x, h_y – шаги сетки, нанесенной на расчетную область.

Известно, что рекурсивная вычислительная процедура, основанная на (1) – (3), неустойчива и приводит к неконтролируемому накоплению погрешности при удалении точки наблюдения поля от граничной поверхности. Для исследования этой зависимости используем аналитическое решение задачи о распределении потенциала поля в системе, образованной равномерно заряженной осью, расположенной на расстоянии a над металлической плоскостью. Распределение нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля на металлической плоскости в этой системе определяется выражением

$$E_y(x,0) = \frac{\tau a}{\pi\varepsilon(a^2 + x^2)}, \quad (4)$$

а потенциал поля в любой точке может быть вычислен по формуле

$$\varphi(P) = U_0 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{(a+y)^2 + x^2}}{\sqrt{(a-y)^2 + x^2}}. \quad (5)$$

Задавшись в (3) распределением (4), используя разностное решение (1) – (3), были рассчитаны потенциалы в узловых точках сетки, нанесенной на расчетную область. Сравнивая полученные результаты со значениями, вычисленными по (5), отметим следующее. При фиксированной y-координате точки наблюдения поля с ростом x-координаты относительная погрешность уменьшается. В области $y < a$ погрешности накапливаются относительно медленно, а вблизи $y = a$ алгоритм теряет устойчивость. Потеря устойчивости алгоритмом при $y \geq a$ характерна и при больших значениях x-координаты точки наблюдения поля.