УДК 517.711.3:519.68

А.Е. ПУТЯТИНА, ХНУРЭ (г. Харьков)

УПРАВЛЕНИЕ НЕГОСУДАРСТВЕННЫМИ ПЕНСИОННЫМИ ФОНДАМИ В УСЛОВИЯХ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ

Розроблені математичні моделі управління та оцінки діяльності недержавних пенсійних фондів в умовах економіки, яка розвивається. В умовах нестабільного фінансового ринку часто буває необхідним враховувати в управлінських моделях банкрутство, реструктуризацію, вливання капіталу. У статті наведеніі краєві задачі для визначення поточного розміру пенсійних внесків та обчислення вартості фінансових інструментів для захисту від дефолта. Наведені розв'язки рівнянь у аналітичному вигляді у формі рядов Фур'є.

The paper describes mathematical models of management and evaluating the activity of non-state pension funds in developing economy. In conditions of unstable financial market it is often necessary to take into account bankruptcy, restructuring, capital injection in management models. In this paper boundary problems that allow the manager to determine the fair value of pension policies and default hedging instruments are derived. The analytical solutions to these problems are given in the form of Fourier series.

Постановка проблемы. В течение многих лет в Украине и в странах СНГ основной пенсионной системой являлась солидарная пенсионная система. Однако, когда в конце прошлого столетия уровень рождаемости упал, солидарная пенсионная система перестала выполнять свои функции. Это и привело к необходимости пенсионной реформы.

Основная идея пенсионной реформы – построение трехуровневой системы пенсионного обеспечения, основным звеном которой станут негосударственные пенсионные фонды, средства которых могут стать мощным источником внутренних инвестиций.

На Украине экономика и финансовый рынок находятся на стадии развития. Поэтому в таких условиях негосударственный пенсионный фонд может попасть в ситуацию банкротства. В случае реструктуризации негосударственный пенсионный фонд забирает назад часть своих обязательств во избежание банкротства. Вливание капитала является также одной из мер для избежания дефолта.

Негосударственные пенсионные фонды играют важную роль в повышении уровня пенсионного обеспечения и улучшении социального благосостояния населения. В связи с этим в условиях перехода на новую трехуровневую систему пенсионного обеспечения, разработка стратегий эффективного управления негосударственными пенсионными фондами является актуальной задачей.

Анализ литературы. В работе [1] рассматриваются особенности новой трехуровневой пенсионной системы, и обосновывается необходимость применения математических методов для управления и оценки негосударственных пенсионных фондов. Большинство рыночных моделей основываются на принципе оценки без риска и строятся на теории Блэка-Шоулза, рассмотренной в [2, 3]. Одной из модификаций модели Блэка-Шоулза является модель Мертона оценки стоимости фирмы [4, 5], которая может быть использована для управления деятельностью государственных пенсионных фондов. Однако эта модель не применима для управления негосударственными пенсионными фондами, т.к. в ней не учитывается механизм распределения прибыли фонда [6]. Математическая модель, которая позволяет оценить деятельность негосударственных пенсионных фондов с учетом механизма распределения прибыли при успешной инвестиционной деятельности фонда, была рассмотрена в статье [7]. Модель, использующая такой подход, эффективна не только в странах с устойчивой рыночной экономикой, но и в развивающихся странах.

В данной статье рассматривается модификация математической модели [7] с учетом возможного банкротства, реструктуризации и вливания капитала. К основным задачам статьи относятся постановка и решение краевых задач для управления негосударственными пенсионными фондами с использованием метода Фурье [8].

Эта модель также применима для оценки деятельности и страховых компаний.

Цель статьи – оптимизация размера денежных взносов в негосударственные пенсионные фонды и оптимизация стратегий страхования в условиях развивающейся экономики.

Математическая модель. Необходимо определить оптимальный размер пенсионных взносов и оптимальную стоимость инструмента хеджирования негосударственного пенсионного фонда с учетом банкротства, реструктуризации или вливания капитала. Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{r}_g V \frac{\partial p}{\partial V} + rW \frac{\partial p}{\partial W} + \frac{1}{2}\sigma^2 W^2 \frac{\partial^2 p}{\partial W^2} - rp = 0,$$

где p – стоимость пенсионного полиса или опциона put-to-default (определяется граничным условием); V – пассивы фонда; W – активы фонда, t – время; r – банковская процентная ставка; r_g – процентная ставка гарантированная пенсионным полисом; σ – изменчивость активов.

Распределение прибыли задается краевым условием в точке $1+\beta$, ($\beta > 0$, пороговый параметр):

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0\Big|_{W/V=1+\beta}.$$

Условие банкротства задается следующей формулой

$$p = W\Big|_{W/V=1-\gamma}.$$

В случае вливания капитала краевое условие принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial W} = 0\Big|_{W/V=1-\gamma} .$$

При реструктуризации краевое условие задается формулой

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0|_{W/V=1-\gamma} .$$

Для приведения задачи к каноническому виду используем замену переменных

$$p(W,V,t) = Vu(x,t),$$

где $x = \ln(W/V), \quad (T-t)\cdot\sigma^2/2 = \tau.$

Банкротство. Банкротство негосударственного пенсионного фонда наступает, если количество активов фонда меньше его пассивов, и фонд не в состоянии выплатить по своим обязательствам. В случае банкротства пенсионного фонда, держатели пенсионных полисов получат все имеющиеся активы фонда.

В результате замены переменных задачу можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}(k-1) - ku,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\Big|_{x=\ln(1+\beta)} \text{ (распределение прибыли);}$$

$$u = b > 0\Big|_{x=\ln(1-\gamma)} \text{ (банкротство),}$$

где τ – время; $k = 2r - r_g/\sigma^2$; $b = 1-\gamma$ для полиса и $b = \gamma$ для put-опциона, $0 < \gamma < 1$. Начальное условие для полиса имеет вид $\min(W,V)$ или в безразмерных переменных $\min(e^x,1)$, а для put-опциона $\max(1-e^x,0)$. Далее сделаем начальные условия однородными и сведем задачу к канонической форме. Подставим $\tilde{v}(x,t)$ вместо $u(x,t)$. Определим $u(x,t)$ как:

$$u(x,\tau) = \tilde{v}(x,\tau)e^{ax+c\tau},$$

$$a = -\frac{k-1}{2},\ c = -\frac{(k+1)^2}{4}.$$

В результате получим

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \varphi \tilde{v} \Big|_{x=\ln(1+\beta)} \text{ (распределение прибыли);}$$

$$\tilde{v} = \tilde{b}(\tau) > 0 \Big|_{x=\ln(1-\gamma)} \text{ (банкротство),}$$

где $\tilde{b}(\tau) = \dfrac{be^{c\tau}}{(1-\gamma)^a}$ и $\varphi = \dfrac{k+1}{2}$.

Для того, чтобы сделать граничные условия однородными, подставим $\tilde{v}(x,\tau)$ вместо $v(x,\tau)$:

$$\tilde{v}(x,\tau) = \tilde{b}(\tau) + \frac{\varphi \tilde{b}(\tau)}{1-\varphi l} x + v(x - \ln(1-\gamma), \tau) .$$

где $l = \ln(1+\beta) - \ln(1-\gamma)$.

Получим

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,\tau); \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi v \Big|_{x=l} \text{ (распределение прибыли);} \tag{2}$$

$$v = 0 \Big|_{x=0} \text{ (банкротство),} \tag{3}$$

где $f(x,\tau) = -\dfrac{(1-\varphi)l + \varphi x}{1-\varphi l} \dfrac{d\tilde{b}}{d\tau} = -\dfrac{bce^{c\tau}}{(1-\gamma)^a} \dfrac{(1-\varphi)l + \varphi x}{1-\varphi l}$.

Так как $c < 0$, однородная часть $f(x,\tau)$ стремиться к нулю при $\tau \to \infty$.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля в пространстве $C^2(0,1)$.

$$Dv = \lambda v \, ; \; D = -\frac{d^2}{dx^2} ,$$

где D – оператор в пространстве $C^2(0,1)$; λ – действительное собственное число симметричного оператора D. В этом пространстве функции удовлетворяют граничным условиям (2) и (3).

Задача Штурма-Лиувилля имеет следующий набор собственных векторов v_k, и собственных чисел $\mu_k = \lambda_k^2$:

$$v_k(x) = \sin(\lambda_k x),$$

где $\lambda_k > 0: \varphi \tan(\lambda_k l) = \lambda_k$.

Трансцендентное уравнение для λ_k имеет счетное число неотрицательных корней. Также имеется отрицательный спектр $\mu_0 = -\lambda_0^2$ задачи Штурма-Лиувилля:

$$v_0(x) = \sinh(\lambda_0 x),$$

где $\lambda_0 > 0$: $\varphi\tanh(\lambda_0 l) = \lambda_0$.

Набор собственных функций, полученный при решении задачи Штурма-Лиувилля, образует ортогональный базис в пространстве $L_2(0,l)$.

Полнота ортогональной системы позволяет нам записать общее решение однородной задачи, соответствующей задаче (1), используя ряды Фурье [6]:

$$\mathrm{v}_{hom}(x,\tau) = B_0 e^{\lambda_0^2 \tau} \sinh(\lambda_0 x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\lambda_k^2 \tau} \sin(\lambda_k x),$$

где B_k, $k = \overline{0,\infty}$ определяется начальными условиями,

$$B_0 = \frac{2}{\sinh(2\lambda_0 l)/(2\lambda_0) - l} \int_0^l v(0,x) \sinh(\lambda_0 x) dx;$$

$$B_k = \frac{2}{1 - \sinh(2\lambda_k l)/(2\lambda_k)} \int_0^l v(0,x) \sinh(\lambda_k x) dx \quad \text{для } k \geq 1.$$

Рассмотрим теперь неоднородную часть системы. Для этого разложим неоднородную часть $f(x,\tau)$, используя тот же набор собственных функций.

Предположим, что $f_k(\tau)$ являются коэффициентами разложения, тогда будем решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $z_k = z_k(\tau)$, с нулевым начальным условием

$$\frac{dz_k}{d\tau} = -\mu_k z_k + f_k(\tau), \; k = \overline{0,\infty}, \; z_k(0) = 0.$$

Решение этой системы уравнений получается из формулы Коши

$$z_k(\tau) = \int_0^\tau f_k(s) e^{-\mu_k(\tau - s)} ds, \; k = \overline{0,\infty}.$$

Частное решение неоднородной задачи (1) выглядит так:

$$v_{in\hom}(x,\tau) = z_0(\tau)\sinh(\lambda_0 x) + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\tau)\sin(\lambda_k x).$$

Решение задачи (1) может быть представлено как сумма однородных и неоднородных частей

$$v(x,\tau) = (B_0 e^{\lambda_0^2 \tau} + z_0(\tau))\sinh(\lambda_0 x) + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k e^{-\lambda_k^2 \tau} + z_k(\tau))\sin(\lambda_k x).$$

Вливание капитала. Негосударственный пенсионный фонд может получать мгновенную финансовую инъекцию $\Delta W > 0$ от спонсора каждый раз, когда наступает банкротство (т.е. когда $W/V < 1 - \gamma$). Краевая задача в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}(k-1) - ku;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\Big|_{x=\ln(1+\beta)} \text{ (распределение прибыли);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0\Big|_{x=\ln(1-\gamma)} \text{ (вливание капитала).}$$

Далее, обозначим

$$u(x,\tau) = v(x - \ln(1-\gamma), \tau) .$$

В результате этой замены переменных получим

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi v\Big|_{x=1} \text{ (распределение прибыли);}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0\Big|_{x=0} \text{ (вливание капитала).}$$

Положительный спектр задачи Штурма-Лиувилля ($\mu_k = \lambda_k^2$) удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению $\varphi\mathrm{ctan}(\lambda_k l) = -\lambda_k$ и имеет собственные функции $v_k(x) = \cos(\lambda_k x)$. Как и в предыдущем случае, существует и отрицательное собственное значение $\mu_0 = -\lambda_0^2$, которое удовлетворяет уравнению $c\mathrm{tanh}(\lambda_0 l) = \lambda_0/\varphi$ и соответствует собственной функции $v_0(x) = \cosh(\lambda_0/\varphi)$. Как и раньше, решение запишем с использованием ортогонального множества собственных функций на [0, l], которые удовлетворяют соответствующим граничным условиям

$$v(x,\tau) = B_0 e^{\lambda_0^2 \tau}\cosh(\lambda_0 x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\lambda_k^2 \tau}\cos(\lambda_k x),$$

где B_k, $k = \overline{0,\infty}$ получено из начального условия для собственных функций;

$$B_0 = \frac{2}{l + \sinh(2\lambda_0 l)/(2\lambda_k)} \int_0^1 v(x,0)\cosh(\lambda_0 x)dx;$$

$$B_k = \frac{2}{l + \cos(2\lambda_k l)/(2\lambda_k)} \int_0^1 v(x,0)\cos(\lambda_k x)dx, \ \ k \ge 1 .$$

Реструктуризация. Когда отношение активов негосударственного пенсионного фонда к его пассивам становится ниже определенного порога, и вливание капитала невозможно, негосударственный пенсионный фонд вынужден взять некоторые обязательства назад. Это не очень хороший способ решения проблемы, в результате применения которого пенсионный фонд может быть вынужден защищать правомерность своих действий в суде, однако иногда такие действия лучше, чем банкротство. Математически задача может быть сформулирована следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}(k-1) - ku \ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\bigg|_{x=\ln(1-\beta)} \quad \text{(распределение прибыли);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\bigg|_{x=\ln(1-\gamma)} \quad \text{(реструктуризация).}$$

Задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ ;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi v\big|_{x=l} \quad \text{(распределение прибыли);}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi v\big|_{x=0} \quad \text{(реструктуризация).}$$

Задача Штурма-Лиувилля имеет следующий набор собственных функций:

$$v_k(x) = \frac{k\pi}{\varphi l}\cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right) \ ; \qquad (4)$$

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \ k = 1, ..., \infty \ ;$$

$$v_0(x) = e^{\varphi x}, \ \ \mu_0 = -\varphi^2 \ . \qquad (5)$$

Система этих функций является ортогональной и полной в пространстве $L_2(0,l)$. Это позволяет представить решение задачи в виде ряда Фурье

$$v(x,\tau) = B_0 e^{\varphi^2 \tau} v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-(\pi k/l)^2 \tau} v_k(x) \ .$$

Коэффициенты B_k, $k = \overline{0,\infty}$ определяются следующим образом:

$$B_k = \frac{2}{l + l(\pi k/\varphi l)^2))} \int_0^1 v(x,0) v_k(x) dx \ , \ B_0 = \frac{2\varphi}{\exp(2\varphi l) - 1)} \int_0^1 v(x,0) v_0(x) dx \ .$$

Выводы. В статье разработаны и обоснованы математические модели, которые могут быть применены для управления (определения оптимального размера пенсионных взносов и оптимальной стоимости инструментов для защиты от риска дефолта) негосударственными пенсионными фондами в условиях развивающейся рыночной экономики.

Полученные математические модели могут применяться для управления негосударственными пенсионными фондами в условиях банкротства, реструктуризации и вливания капитала. Применение управленских подходов, которые уже долгое время используются для управления пенсионными фондами в Европе, может быть очень актуальным и полезным в рамках новой пенсионной системы.

Список литературы: **1.** *Юровский Б.С.* Пенсии государственные и негосударственные: на что можно рассчитывать. – Харьков: Центр «Консульт», 2005. – 248 с. **2.** *Black, F., Scholes, M.* The pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – 637 p. **3.** *Hull John C.* Options, Futures, and other Derivative Securities. New Jersey: Prentice Hall Inc. – 1993. – 492 p. **4.** *Merton R.C.* On pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates // Journal of Finance – 1974. – Vol. 29. – P. 449–470. **5.** *Schonbucher Philipp J.* Credit Derivatives Pricing Models; Models, Pricing and Implementation. Chichester: Wiley Finance. – 2003. – 375 p. **6.** *Prieul D.* On Pricing and Reserving with-profits Life Insurance Policies // Applied Mathematical Finance. – 2001. – № 8. – P. 145–166. **7.** *Putyatina Oleksandra.* Designing an Information System for Pension Fund Management // Proceedings of the 9th International Conference CADSM. – 2007. – Lviv-Polyana, Ukraine. – P. 404–405. **8.** *Hildebrand Francis. B.* Methods of Applied Mathematics. – Dover Publications, Inc. New York – 1992.

Поступила в редакцию 06.04.2007