7. Колебания в консервативной нелинейной системе

При макроскопическом рассмотрении любую реальную систему следует считать неконсервативной, т.е. системой в которой полная энергия не остается постоянной в течение времени, а рассеивается в процессе движения. Однако в некоторых случаях этот процесс рассеяния происходит настолько медленно по сравнению с характерными масштабами времени в системе, что он очень слабо влияет на характер движения. Поэтому на многие вопросы можно с достаточной точностью ответить, считая, что сумма кинетической и потенциальной энергии в системе остается постоянной. Именно в результате такой идеализации мы приходим к понятию консервативной системы.

Нелинейность также является свойством большинства реальных физических систем. Например, если сила, действующая на тело, зависит от положения тела, то дифференциальное уравнение движения становится в общем случае нелинейным:

$$m\ddot{x} = f(x).$$

Применение в электрическом колебательном контуре катушки индуктивности с ферритовым сердечником также вызывает нелинейность системы, т.к. в этом случае индуктивность контура не является постоянной величиной, а зависит от величины тока, протекающего в контуре $L=L(i)$. К такому же результату приводит и использование в колебательном контуре конденсатора с сегнетоэлектриком или барьерной емкости электронно-дырочного перехода. В этих случаях величина емкости зависит от приложенного к ней напряжения $C=C(u)$.

Можно сказать, что линейность, также как и консервативность, является в некоторой степени идеализацией колебательной системы. Если предположение линейности при анализе системы позволяет с достаточной точностью ответить на интересующие нас вопросы, то такая идеализация вполне уместна. В этом разделе мы познакомимся с системами, в которых нелинейностью не будем пренебрегать.

7.1. Дифференциальное уравнение движения в консервативной нелинейной системе

В качестве примера рассмотрим простейшую колебательную систему с одной степенью свободы, представляющую собой шарик, движущийся без трения в криволинейном желобе (*рис. 7.1*). То, что движение шарика будет осциллирующим, очевидно. Также очевидно, что в общем случае колебательный процесс не будет гармоническим.

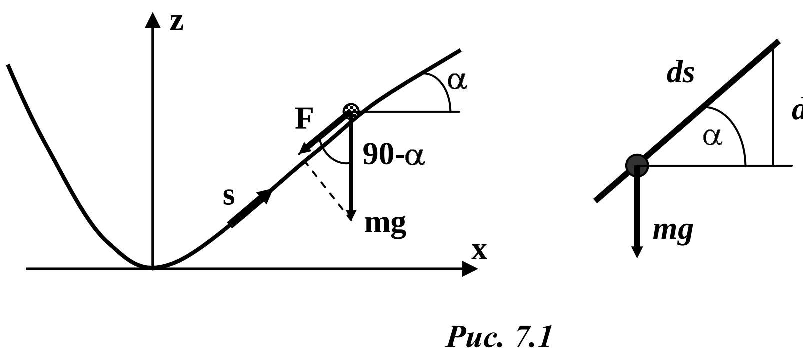

Рис. 7.1

Положение шарика будем описывать координатой s, откладываемой по желобу так, как показано на рисунке. Если масса шарика m, то уравнение движения

$$m\ddot{s} = -F$$

(F – скатывающая сила; минус из-за противоположности направлений скатывающей силы F и координаты s).

Проекция силы тяжести на касательную к желобу

$$F = mg\cos(90^o - \alpha) = mg\sin\alpha.$$

Так как

$$\sin\alpha = \frac{dz}{ds},$$

то

$$F = mg\frac{dz}{ds}.$$

Тогда уравнение движения приобретает вид:

$$m\ddot{s} + mg\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (7.1.1)$$

Если обозначить потенциальную энергию, как

$$W(s) = mg\,z(s)$$

то (7.1.1) можно записать так:

$$m\ddot{s} + \frac{dW(s)}{ds} = 0. \qquad (7.1.2)$$

Функция *z(s)* описывает форму желоба в координатах [*z, s*] (не путать с декартовыми координатами [*z, x*]). Если форма желоба описывается уравнением

$$z(s) = ks^2$$

(потенциальная яма имеет параболический характер), то

$$\frac{dW(s)}{ds} = 2kmgs,$$

и тогда дифференциальное уравнение (7.1.2) окончательно записывается так:

$$\ddot{s} + 2kgs = 0.$$

Таким образом, если желоб имеет параболическую форму, то движение шарика в нем будет представлять собой гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{2kg}$.

Уравнение (7.1.2) легко интегрируется. Пусть $\dot{s} = v$ – скорость качения шарика по желобу. Тогда это уравнение можно записать в виде:

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{dW(s)}{ds} = 0.$$

или

$$mv\frac{ds}{dt} + \frac{dW(s)}{ds} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение по *s*, получим

$$\frac{mv^2}{2} + W(s) = E. \qquad (7.1.3)$$

Это уравнение сохранения энергии в консервативной системе (*E* – полная энергия).

7.2. Фазовый портрет движений в консервативной нелинейной системе

Решение уравнения движения нелинейного осциллятора в общем случае осуществляется специальными методами Ван-дер-Поля и Пуанкаре. Но представить общую картину движения нелинейного осциллятора можно с помощью фазовой плоскости.

Рассмотрим некоторые общие свойства фазовых кривых для нелинейного осциллятора. Уравнение движения можно записать в виде одного дифференциального уравнения второго порядка (закон Ньютона)

$$\ddot{x} = f(x)$$

($f(x)$ – сила) или в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = f(x).$$

Избавившись от времени в этих уравнениях, можно получить уравнение фазовых кривых:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y). \qquad (7.2.1)$$

Скорость движения изображающей точки по фазовой траектории

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2}.$$

Из этого выражения видно, что в любой точке фазовой плоскости изображающая точка имеет конечную отличную от нуля скорость, за исключением состояний равновесия (особых точек), в которых одновременно

$$y = 0, \quad f(x) = 0.$$

Следовательно, на фазовой плоскости точки, соответствующие состояниям равновесия, расположены на оси абсцисс.

Сделаем несколько замечаний, касающихся общего вида фазовых траекторий:

1. Из уравнения (7.2.2) видно, что фазовая траектория симметрична относительно оси x.
2. Касательные к фазовым траекториям вертикальны только в точке пересечения ими оси x. Действительно, из уравнений (7.2.1) следует, что производная $dy/dx \to \infty$ только при y=0.
3. Из этого же уравнения следует, что касательные к фазовым траекториям горизонтальны (т.е. dy/dx=0) в тех точках, которые соответствуют корням уравнения $f(x)$=0. Геометрическим местом этих точек являются прямые, параллельные оси y, и пересекающие ось x в особых точках (в положении равновесия f=0).

Скорость колеблющейся точки можно определить из уравнения сохранения энергии (7.1.3). Предположив для простоты m=1, получим

$$v = \dot{x} = \pm\sqrt{2[E - W(s)]}. \qquad (7.2.2)$$

С помощью этого выражения можно построить фазовую траекторию движения нелинейного осциллятора, если известна полная энергия системы E и форма нелинейного желоба $W(s)$. Величина E определяется положением точки на желобе в начальный момент времени, т.е. определяется начальными условиями.

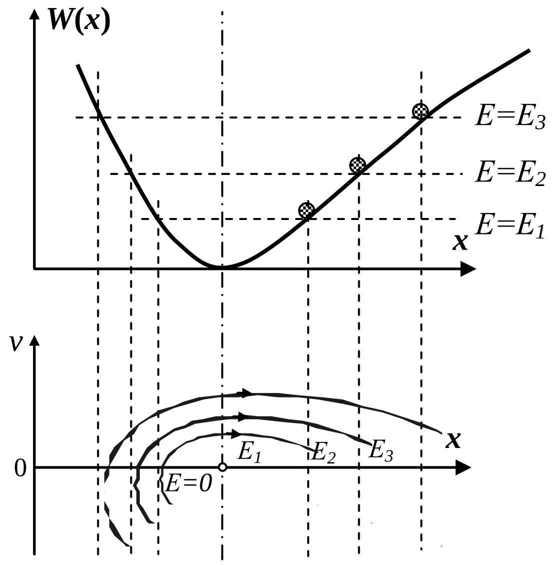

Рис. 7.2

Способ построения фазовой траектории достаточно прост. Чтобы получить интегральную кривую на фазовой плоскости, которая для удобства изображена на *рис. 7.2* под графиком потенциальной энергии, нужно последовательно извлекать из разностей E-$W(x)$ квадратные корни, умножать их на $\sqrt{2}$ и откладывать полученный результат на фазовой плоскости вверх и вниз от оси x. При построении следует помнить, что все интегральные кривые пересекают ось x, имея вертикальную касательную, если только они не пересекаются в особой точке. Направление движения представляющей точки определяется, как и раньше, и в выбранных координатах происходит по часовой стрелке.

При малой начальной энергии амплитуда колебаний будет небольшой. Тогда функцию $W(x)$ в уравнении (7.1.2) можно разложить в ряд Тейлора до квадратичного члена. В этом случае колебания шарика в желобе будут носить гармонический характер.

Таким образом, в рассмотренной нелинейной системе амплитуда колебаний зависит от начальных условий – положения шарика на желобе в начальный момент времени, и, следовательно, от полной энергии системы. Характер же колебаний определяется формой желоба, т.е. нелинейностью системы.

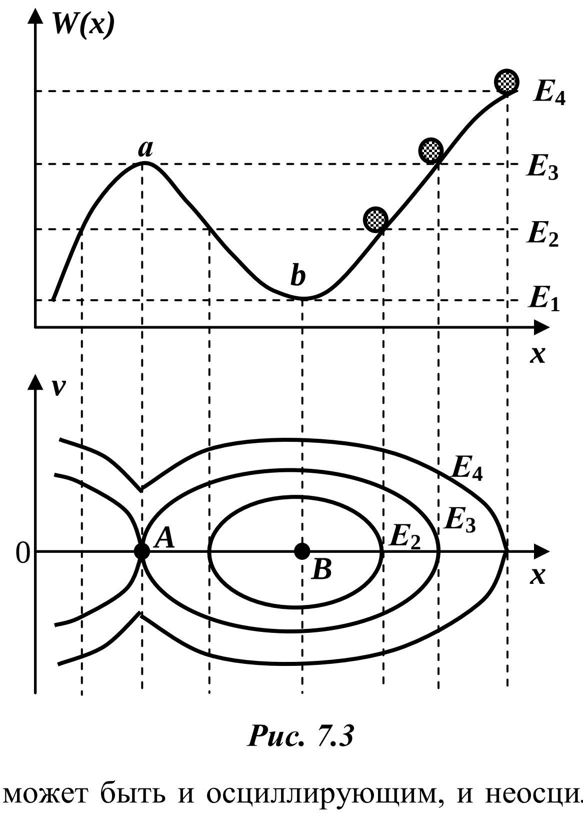

Рис. 7.3

Более сложный случай представлен на *рис. 7.3*. Представленная на нем система имеет два положения равновесия – устойчивое в точке ***b*** и неустойчивое в точке ***a***.

Очевидно, что если энергия системы в начальный момент времени $E<E_3$, то движение шарика будет осциллирующим. На фазовой диаграмме такие движения описываются замкнутыми кривыми. Состоянию устойчивого равновесия на фазовой диаграмме соответствует *особая точка типа центр* (точка ***B***).

Если же энергия системы в начальный момент $E>E_3$, то движение шарика становится неосциллирующим (система перестает быть колебательной). Фазовая траектория такого движения является разомкнутой кривой. Состоянию неустойчивого равновесия соответствует *особая точка типа седло* (точка ***A***).

Особый случай соответствует начальной энергии $E=E_3$. Характер движения в этом случае может быть и осциллирующим, и неосциллирующим. Это зависит от случайных микроскопических факторов, которые не учитываются в уравнениях колебательной системы. Фазовая траектория, соответствующая движению системы при начальной энергии E_3, называется *сепаратрисой*. Она имеет две особые точки – ***A*** и ***B***.

7.3. *Понятие изохронности колебательной системы*

Изохронными называют такие колебательные системы, период собственных колебаний в которых не зависит от их амплитуды. Как мы видели раньше, такими свойствами обладают все линейные колебательные системы. Например, период колебаний математического маятника зависит только от длины нити подвеса, а также от значения ускорения силы тяжести. Амплитуда же определяется начальными условиями – углом отклонения маятника от вертикали или его начальной энергией.

В рассмотренных примерах нелинейных систем для периодических движений значение периода можно определить следующим образом. Скорость движения шарика по желобу

$$v = \frac{ds}{dt};$$

отсюда

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Или, подставив (7.2.2),

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2[E - W(s)]}}.$$

Интегрируя по замкнутому пути движения шарика в течение одного периода, получим значение времени прохождения шарика всего пути, т.е. значение периода:

$$T = \oint_S \frac{ds}{\sqrt{2[E - W(s)]}} = 2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{2[E - W(s)]}}.$$

Здесь S – полный путь движения шарика по желобу в течение периода, а s_1 и s_2 – крайние точки траектории шарика в желобе.

Таким образом, для периодических движений, которые на фазовой плоскости отображаются замкнутыми траекториями, справедлива зависимость частоты от полной энергии системы, т.е.

$$\omega = f(E).$$

Т.к. полная энергия колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды, то

$$\omega = f(A^2).$$

Отсюда следует важный вывод: колебания в нелинейных системах не изохронны, т.е. в них частота зависит от амплитуды. (Естественно, справедливо и обратное утверждение – амплитуда колебаний в нелинейных системах зависит от частоты).

7.4. *О резонансе в нелинейных системах*

Резонанс в нелинейных системах – тема отдельного рассмотрения. Здесь мы сформулируем лишь основные выводы.

Как мы установили при рассмотрении вынужденных колебаний в линейных системах, резонанс наблюдается только в том случае, когда частота вынуждающей силы близка к собственной частоте колебательной системы, т.е. если $\Omega \approx \omega_0$. (Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше затухание в системе). В нелинейных системах резонанс будет наблюдаться и на других частотах, называемых *гармониками*. Например, если нелинейность квадратичная, то дифференциальное уравнение такой системы

$$\ddot{x} + \alpha x^2 = 0, \quad \omega_0^2 = \alpha x.$$

В этом случае резонанс будет наблюдаться на частотах вынуждающей силы $\Omega \approx \omega_0$, а также на частотах 2Ω – первая гармоника, 4Ω – вторая гармоника и т.д. С увеличением номера гармоники резонанс ослабевает.