6. Вынужденные колебания

Чтобы в реальной колебательной системе могли возникнуть незатухающие колебания, нужно компенсировать потери энергии в ней, которые обусловливаются трением или омическим сопротивлением. Одним способом компенсации энергии является введение в систему элемента с "отрицательным" трением или сопротивлением. Другой способ пополнения энергии системы возможен с помощью какого-либо воздействующего на систему фактора, изменяющегося по периодическому закону. Для механических колебаний роль такого фактора может играть внешняя сила, которая называется вынуждающей силой. Для электрических колебаний таким фактором может являться подводимая к контуру внешняя ЭДС, изменяющаяся также по гармоническому закону. Колебания, возникающие в системе, на которую воздействуют периодическая вынуждающая сила (или ЭДС), называются *вынужденными*.

6.1. *Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*

Уравнение движения пружинного маятника включает в себя упругую силу, действующую со стороны пружин на груз массой m, и силу трения, пропорциональную скорости движения этой массы:

$$m\ddot{x} = -kx - rx.$$

Если на систему воздействует какая-то сила, изменяющаяся по периодическому закону, то это уравнение приобретает вид:

$$m\ddot{x} = -kx - rx + F_m \cos\omega t.$$

Учитывая, что $2\delta = r/m$, а $\omega_0^2 = k/m$, можно записать

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = u_0 \cos\omega t. \qquad (6.1.1)$$

Аналогично можно записать и уравнение для заряда в колебательном контуре:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t$$

или

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = u_0 \cos\omega t. \qquad (6.1.2)$$

В общем виде уравнения (6.1.1) и (6.1.2) можно записать так:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t}. \qquad (6.1.3)$$

(здесь x_0 – приведенная амплитуда вынуждающей силы или ЭДС).

Решение этого уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения (при равенстве нулю правой части) и любого частного решения самого неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения при $\omega_0 > \delta$ мы получили в разделе 4:

$$s(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos\omega_3 t, \qquad (6.1.4)$$

где частота затухающих колебаний $\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Частное решение будем искать в виде

$$s(t) = s_0 e^{i\xi t}. \qquad (6.1.5)$$

Подставим это решение в уравнение (6.1.3):

$$s_0 e^{i\xi t}(-\xi^2 + 2i\delta\xi + \omega_0^2) = x_0 e^{i\omega t}.$$

Уравнение движения должно удовлетворяться в любой момент времени. Для этого необходимо выполнение условия

$$\xi = \omega.$$

Тогда

$$s_0(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2) = x_0. \qquad (6.1.6)$$

Напомним, что здесь ω – частота вынуждающей силы, а ω_0 – собственная частота колебательной системы при отсутствии трения.

Для нахождения частного решения (6.1.5) необходимо найти s_0. Из (6.1.6) следует

$$s_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\delta\omega} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega} = x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Это комплексное число $s_0 = x_0(a + ib)$, где

$$a = x_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}; \qquad b = x_0 \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Представим его в комплексной форме

$$s_0 = Ae^{i\varphi}, \qquad (6.1.7)$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, φ – разность фаз между периодической вынуждающей силой и вынужденными колебаниями в системе. Эти величины определяются выражениями:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = x_0 \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \qquad (6.1.8)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (6.1.9)$$

Чтобы получить частное решение уравнения (6.1.3), нужно (6.1.7) подставить в (6.1.5), учитывая, что $\xi = \omega$. Тогда

$$s = Ae^{i(\omega t - \varphi)}.$$

Вещественная часть этого числа

$$\operatorname{Re} s = A\cos(\omega t - \varphi), \qquad (6.1.10)$$

где A и φ определяются выражениями (6.1.8, 6.1.9).

Таким образом, полное решение дифференциального уравнения для вынужденных колебаний является суммой (6.1.4) и (6.1.10), т.е.

$$s(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos\omega_з t + A\cos(\omega t - \varphi). \qquad (6.1.11)$$

Первое слагаемое играет существенную роль только в начальной стадии процесса. Затем благодаря экспоненциальному множителю с отрицательным показателем степени это слагаемое становится пренебрежимо малым, и колебания в системе описываются выражением

$$s(t) = A\cos(\omega t - \varphi). \qquad (6.1.12)$$

Отсюда следует, что если на колебательную систему воздействует периодическая сила с частотой ω, то со временем в этой системе устанавливаются незатухающие колебания, частота которых равна частоте вынуждающей силы, а амплитуда и фаза определяются выражениями (6.1.8) и (6.1.9). Время установления незатухающих стационарных колебаний определяются коэффициентом затухания системы: чем больше затухание, тем быстрее устанавливается стационарный колебательный процесс.

6.2. Резонанс

Резонансом называют явление резкого возрастания амплитуды установившихся вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебательной системы.

Как видно из выражения (6.1.8) амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы и от собственной частоты колебательной системы, на которую воздействует периодическая вынуждающая сила. Для нахождения максимума функции $A(\omega)$ нужно найти минимум подкоренного выражения в формуле (6.1.8). Продифференцируем его и приравняем нулю:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]'_\omega = -4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0$$

Это равенство выполняется при

$$\omega = 0, \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Из этих трех величин физический смысл имеет только положительный корень. Именно при таком значении частоты подкоренной значение минимально, а амплитуда вынужденных колебаний максимальна. Частота, при которой наблюдается максимальная амплитуда, называется резонансной частотой:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \qquad (6.1.13)$$

Подставив (6.1.13) в (6.1.6), получим выражение для значения резонансной амплитуды:

$$A_{рез} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \qquad (6.$$

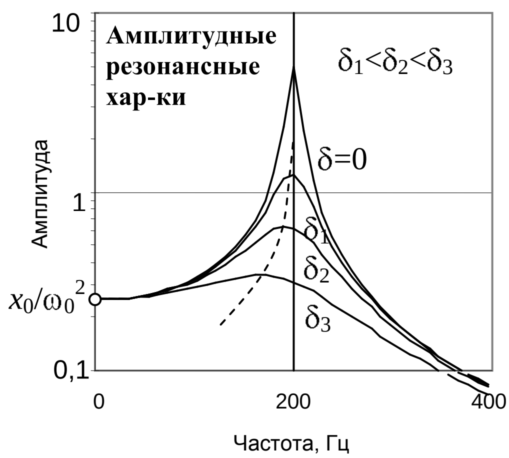

Рис. 6.1

Из последних выражений видно, что при уменьшении затухания в колебательной системе резонансная частота приближается к собственной частоте колебательной системы (снизу), а амплитуда вынужденных колебаний возрастает. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы выражается амплитудными резонансными характеристиками, пример которых для конкретного случая приведен на *рис. 6.1.* (Собственная частота колебательной системы ω_0=200 Гц).

Чем больше коэффициент затухания δ, тем менее выражен резонанс, а резонансная частота уменьшается (*пунктирная линия*). При увеличении частоты вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю. При $\omega \to 0$ амплитуда колебаний при любом затухании стремится к величине x_0 / ω_0^2, которая называется *статистическим отклонением*.

Разность фаз колебаний в системе и вынуждающей силы от частоты этой силы представлена на *рис. 6.2*. Колебания в системе совпадают по фазе с вынуждающей силой только

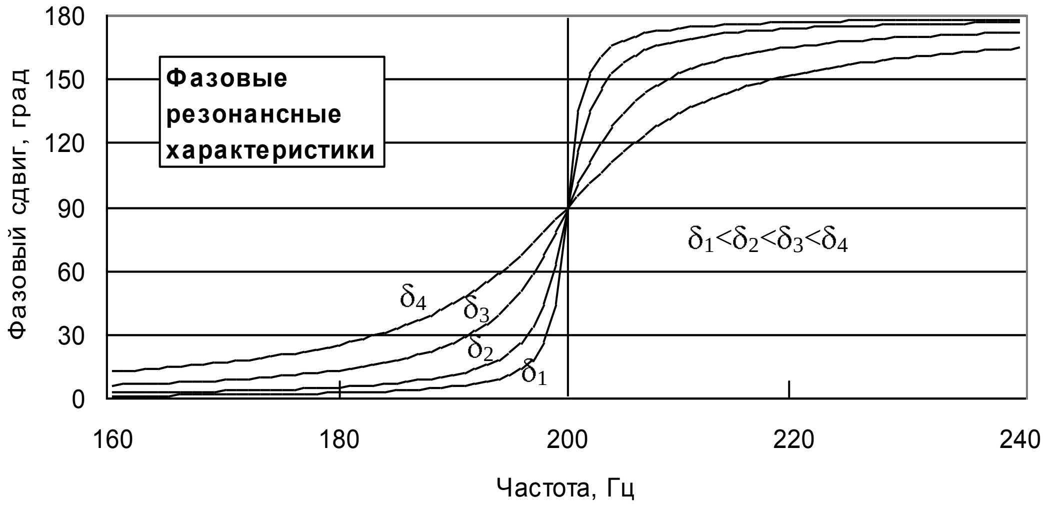

Рис. 6.2

при отсутствии затухания (т.е. φ=0 при δ=0). Если частота вынуждающей силы равна собственной частоте колебательной системы ($\omega=\omega_0$), то при любом затухании фазовый сдвиг равен 90^0. При увеличении частоты фазовый сдвиг стремится к 180^0.