4. Свободные затухающие колебания в линейных неконсервативных системах

Еще раз отметим, что консервативные и линейные системы в реальности не существуют. Все колебательные системы в определенной мере являются и нелинейными, и неконсервативными. Все дело в степени значимости этих свойств. В рассмотренных выше системах мы пренебрегали ими, считая их не существенными. Теперь мы будем считать только нелинейность несущественным фактором, а общее количество энергии в системе уже не будем считать постоянным. Имеющаяся в системе в начальный момент времени энергия убывает в механических системах из-за трения, а в электромагнитных из-за омического сопротивления и излучения реактивных элементов. Ниже мы будем рассматривать именно такие системы. Но прежде обратимся на некоторое время к математическому анализу.

4.1. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + 2p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Здесь y – функция от x, а штрихами обозначены ее производные по x. (Коэффициент *2* при первой производной введен для удобства решения задачи затухающих колебаний). Если $p(x)$ и $q(x)$ вещественные постоянные, то уравнение упрощается:

$$y'' + 2py' + qy = 0. \tag{4.1.1}$$

Если y_1 –решение уравнения (4.1.1), то и Cy_1 (C – произвольная постоянная) есть решение этого уравнения. Также если y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то и

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{4.1.2}$$

есть решение этого уравнения при произвольных постоянных C_1 и C_2. Таким образом, *решения линейного однородного уравнения (4.1.1) можно умножать на произвольные постоянные и складывать, после чего опять получается решение.*

Для нахождения решения (4.1.1) подставим в него (подстановка Эйлера)

$$y = e^{rx}, \tag{4.1.3}$$

где r – некоторое вещественное или комплексное число. Дифференцируя и вынося e^{rx} за скобки, получим

$$e^{rx}(r^2 + 2pr + q) = 0.$$

Функция (4.1.3) является решением уравнения (4.1.1), если r есть корень квадратного уравнения

$$r^2 + 2pr + q = 0, \tag{4.1.4}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (4.1.1). Корни квадратного уравнения вычисляются по известной формуле

$$r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

В зависимости от соотношения p и q дифференциальное уравнение (4.1.1) может иметь три различных решения:

1. $\boldsymbol{p^2 > q}$. Тогда корни $r_{1,2}$ – вещественные числа. Согласно (4.1.3) решениями будут

$y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$, а общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \qquad (4.1.5)$$

$\boldsymbol{p^2 < q}$**.** Тогда r_1, r_2 – мнимые сопряженные числа:

$$r_1 = -p + i\sqrt{q - p^2}, \qquad r_1 = -p - i\sqrt{q - p^2}.$$

Для сокращения записи обозначим

$$\alpha = -p, \qquad \beta = \sqrt{q - p^2}.$$

Тогда решениями уравнения будут

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x}. \qquad (4.1.6)$$

Сумма и разность этих решений также будет решением дифференциального уравнения, т.е.

$$y_3 = C_1(y_1 + y_2), \qquad y_3 = C_2(y_1 - y_2).$$

Подставляя сюда (4.1.6) и используя формулы Эйлера для выражения тригонометрических функций с помощью комплексных чисел, получим решения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{1}{2}[e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}], \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{2i}[e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}].$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (4.1.7)$$

Одно из частных решений, которое мы будем использовать в дальнейшем, можно записать так:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x$$

или

$$y = C_1 e^{-px}\cos\sqrt{q - p^2}\,x. \qquad (4.1.8)$$

3**.** $\boldsymbol{p^2 = q}$. Тогда $r_1 = r_2 = -p$. Изменим немного коэффициенты p и q так, чтобы корни сделались различными: пусть корень r_1 по-прежнему равен $-p$, а корень r_2 немного отличается от него. В этом случае мы получаем снова два решения $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$. Если вычесть одно решение из другого и разделить разность на (r_2-r_1), то мы получим еще одно решение

$$y_3 = \frac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{r_2 - r_1}.$$

Устремим в этом выражении r_2 к r_1. (Это означает, что в пределе мы получим снова равные корни).

$$y_3 = \lim_{r_2 - r_1 \to 0} \frac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{r_2 - r_1}.$$

Эта запись означает производную от функции e^{rx} по r при r=r_1. Следовательно, второе решение

$$y_3 = (e^{rx})'_r \,|_{r = r_1} = x e^{r_1 x}.$$

Тогда общее решение можно записать в виде суммы y_1 и y_3, т.е.

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}. \qquad (4.1.9)$$

Таким образом, общие решения дифференциального уравнения (4.1.1) в зависимости от соотношения его постоянных коэффициентов имеют вид:

при $p^2>q$: $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

при $p^2<q$: $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

при $p^2=q$: $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$.

4.2. *Пружинный маятник при наличии трения*

Как уже было сказано, здесь мы избавимся от одной идеализации, а именно от отсутствия трения. Но для того, чтобы сохранить линейность колебательной системы нам придется ввести другую идеализацию, впрочем, намного менее строгую, чем та, от которой мы отказываемся. Мы предположим, что сила трения, воздействующая на тело во время движения, пропорциональна скорости. Однако, если речь идет о жидком трении или трении о воздух при малых скоростях, это предположение находится в хорошем соответствии с опытом.

Итак, для силы трения в этом предположении запишем

$$F_{тр}=-r\dot{x},$$

где r – коэффициент трения, а знак минус означает, что сила трения направлена в противоположную сторону от направления движения.

Тогда для уравнения движения имеем:

$$m\ddot{x}=-kx-r\dot{x}.$$

Частота колебаний пружинного маятника при отсутствии трения

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

а коэффициент затухания –

$$\delta=\frac{r}{2m}.$$

Тогда уравнение движения приобретает вид:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0. \qquad (4.2.1)$$

Это уравнение идентично уравнению (4.1.1), решение которого подробно рассмотрено выше. Условие слабого трения $\omega_0^2>\delta^2$ соответствует случаю $q>p^2$. В этом случае решение уравнения (4.2.1) в соответствующих обозначениях описывается выражением

$$x=A_0e^{-\delta t}\cos\omega t.$$

Это значит, что маятник колеблется с частотой

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} \qquad (4.2.2)$$

или

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}. \qquad (4.2.3)$$

Из этих формул видно, что частота колебаний, совершающихся в системе с трением, зависит от степени трения: чем больше трение, тем меньше частота.

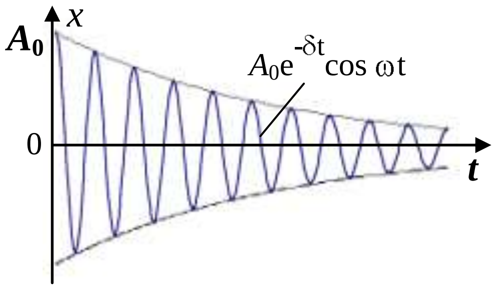

Рис. 4.1

Амплитуда колебаний не является постоянной во времени, а уменьшается по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t}.$$

Промежуток времени, за который амплитуда уменьшается в *e* раз, называется *временем релаксации*:

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

Декрементом затухания называется отношение амплитуд двух последовательных колебаний:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T},$$

а его логарифм – логарифмическим декрементом затухания

$$\theta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Т.к. коэффициент затухания обратно пропорционален времени релаксации $\delta = 1/\tau$, то

$$\theta = \frac{T}{\tau}.$$

Еще одной характеристикой колебательной системы является *добротность*, которая в общем случае определяется как

$$Q = \frac{\pi}{\theta}$$

или, преобразовывая,

$$Q = \frac{\pi\tau}{T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta}.$$

Если затухание невелико, то можно принять, что $\omega \cong \omega_0$, и тогда

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

Для пружинного маятника добротность определяется выражением

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{km}.$$

Физический смысл добротности можно определить так: величина добротности колебательной системы равна отношению полной энергии системы к энергии, теряемой системой за один период колебаний.

Затухающие колебания не являются *периодическими* в соответствии с ранее данным определением. Действительно, в моменты времени, отстоящие друг от друга на кратное число величин $T = 2\pi/\omega$, колебательная система, в которой существует затухание, не находится в одинаковых состояниях. Поэтому периода в строгом смысле этого определения для затухающих колебаний не существует. Однако расстояние во времени между двумя последовательными прохождениями положения равновесия в одном и том же направлении постоянно. Точно также постоянно и равно той же самой величине расстояние во времени между двумя последовательными максимальными отклонениями (также в одинаковом направлении). Этот промежуток времени иногда называют *условным периодом*, но чаще все-таки говорят просто о периоде затухающих колебаний, имея в виду приведенное выше уточнение.

4.3. *Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре*

Раньше мы рассматривали идеализированную модель колебательного контура при отсутствии в нем активного сопротивления и электромагнитного излучения реактивных элементов. Если избавиться от одной идеализации, а именно – ввести активное сопротивление (*рис. 4.2*), то можно считать такую колебательную систему линейной. Действительно, резистор является линейным электрическим элементом в большом диапазоне напряжений и токов.

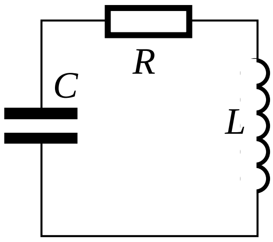

Рис. 4.2

Согласно второму закону Кирхгофа баланс напряжений для такой цепи можно записать с помощью уравнения

$$e_s = iR + u_C,$$

где e_s – э.д.с. самоиндукции катушки (единственная э.д.с. в цепи), i – величина тока в цепи, u_C – падение напряжения на конденсаторе.

Так как $e_s = -L\dfrac{di}{dt}$, а $u_C = \dfrac{q}{C}$, то последнее уравнение переписывается так:

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = 0.$$

Разделив все слагаемые на L и подставив $i = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$ и $\dfrac{di}{dt} = \ddot{q}$, получим дифференциальное уравнение для изменения электрического заряда конденсатора:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

По аналогии с уравнением (4.2.1) обозначим $\dfrac{R}{L} = 2\delta$, $\dfrac{1}{LC} = \omega_0^2$, и тогда снова приходим к канонической форме уравнения затухающих колебаний:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Если $\delta<\omega_0$, или, другими словами, активное сопротивление контура мало по сравнению с реактивным, то величина заряда конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону

$$q = q_0 e^{-\delta t}\cos\omega t,$$

где $\delta=R/2L$ – коэффициент затухания. При этом частота колебаний (в соответствии с выражением (4.1.8), в котором частота равна $\sqrt{q-p^2}$)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Очевидно, что при малом активном сопротивлении контура $\omega \cong \omega_0$. Тогда логарифмический декремент затухания

$$\theta = \delta T_0 = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}},$$

а добротность

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{\pi R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

4.4. Фазовый портрет затухающих колебаний

С методикой получения уравнений фазовых траекторий мы познакомились в *разделе 1.5*, когда выводили уравнение фазовых траекторий для гармонического осциллятора. Тогда, продифференцировав решение дифференциального уравнения, мы получили уравнение для скорости. Затем в уравнениях для координаты и скорости избавились от времени, т.к. фазовая траектория от этого параметра не зависит.

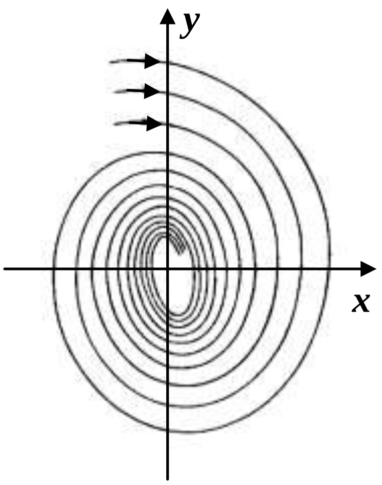

Рис. 4.3

Точно также можно получить уравнение фазовой траектории для затухающего колебательного процесса. В отличие от случая гармонического осциллятора математические выкладки получаются весьма громоздкими, поэтому приведем здесь только окончательное выражение для фазовой траектории затухающих колебаний при $\delta<\omega_0$ ($y = \dot{x}$):

$$(y + \delta x)^2 + \omega^2 x^2 = C \exp\left(2\frac{\delta}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{y + \delta x}{\omega x}\right)$$

Это уравнение описывает семейство простых логарифмических спиралей, для которых начало координат является асимптотической точкой (*рис. 4.3*). При малом затухании ($\delta \to 0$) каждая спираль на протяжении одного оборота близка к эллипсу (с соответствующим образом выбранной константой *C*).