3.2. *Сложение гармонических колебаний одного направления с мало отличающимися частотами*

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых колебания одного направления мало отличаются по частоте. Пусть для простоты амплитуды складываемых колебаний равны A, а начальные фазы равны нулю. Частоты первого и второго колебаний равны, соответственно, $\omega_1=\omega$, а $\omega_2=\omega+\Delta\omega$. Причем $\Delta\omega<<\omega_1,\omega_2$ (условие малости отличий частот). Уравнения таких колебаний имеют вид:

$$x_1 = A\cos\omega t,$$
$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Сложим эти уравнения:

$$x = x_1 + x_2 = A[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t].$$

Заменим сумму косинусов произведением по формуле:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда уравнение для результирующего колебания приобретает вид:

$$x = 2A\cos(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t \cdot \cos\frac{\Delta\omega}{2}t.$$

Учитывая, что $\Delta\omega<<\omega$, окончательно запишем:

$$x = (2A\cos\frac{\Delta\omega}{2})\cos\omega t.$$

Таким образом, при сложении двух колебаний с мало отличающимися частотами получается колебание с такой же частотой, амплитуда которого периодически изменяется по закону

$$A_{рез} = |\, 2Ac\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \,|.$$

Значение берется по модулю, т.к. амплитуда не может быть отрицательной. График результирующего колебания приведен на *рис. 3.2*.

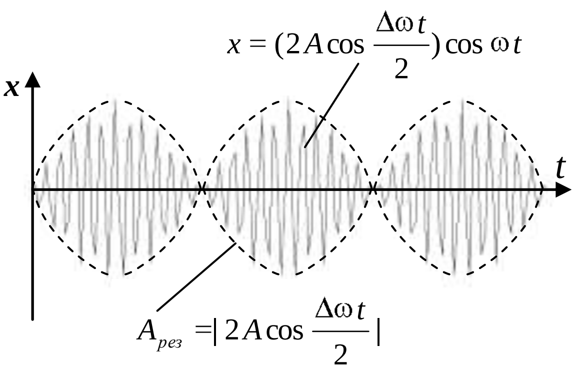

Рис. 3.2

Периодические изменения амплитуды результирующего колебания, возникающие при сложении двух близких по частоте гармонических колебаний, называются биениями. Частота биений в два раза больше, чем частота колебаний амплитуды из-за модуля амплитуды и равна разности частот складываемых колебаний $\Delta\omega$.

Метод биений широко используется для градуировки частоты источников гармонических колебаний (электрических, акустических) по эталонному генератору, для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и пр.

3.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты

Пусть тело одновременно участвует в двух колебательных процессах одинаковой частоты, происходящих вдоль перпендикулярных осей x и y. (Для электромагнитной системы это может означать, что колебания тока происходят в двух проводниках, ориентированных под углом 90° друг к другу).

$$x = A\cos\omega t,$$
$$y = B\cos(\omega t + \varphi).$$

Уравнение траектории движения тела можно найти, исключив из этих уравнений время:

$$\frac{x}{A} = \cos\omega t, \quad \frac{y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi.$$

Подставляя первое уравнение во второе, и учитывая, что $\sin\omega t = \sqrt{1 - x^2/A^2}$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi. \qquad (3.3.1)$$

Это уравнение эллипса, ориентация осей которого в общем случае не совпадает с осями x и y (*рис. 3.3*). Такие колебания называются *эллиптически поляризованными*. Если амплитуды складываемых колебаний одинаковы, то эллипс вырождается в окружность; говорят, что такие колебания *поляризованы по кругу*.

Рассмотрим два важных для практики случая.

1. Пусть разность фаз складываемых колебаний кратна π, т.е.

$$\varphi = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

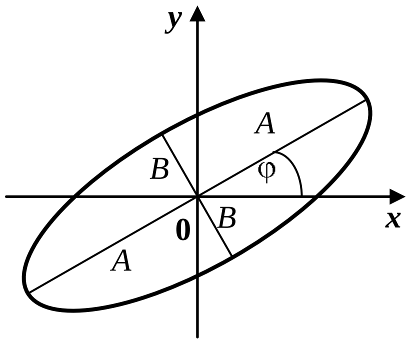

Рис. 3.3

Тогда $\cos\varphi = \pm 1$, а $\sin\varphi = 0$, и уравнение (3.3.1) приобретает вид:

$$\frac{x^2}{A^2} \pm \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Отсюда следует

$$y = \pm\frac{B}{A}x.$$

Это уравнение прямых линий (*рис. 3.4*). Колебания, совершаемые таким образом, называются *линейно поляризованными*.

2. Если разность фаз складываемых удовлетворяет условию

$$\varphi = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то $\cos\varphi = 0$, а $\sin\varphi = \pm 1$, и уравнение (3.3.1) записывается в виде:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями x и y. При равенстве A и B эллипсы вырождаются в окружности.

В радиотехнике и радиофизике с помощью сложения взаимно перпендикулярных

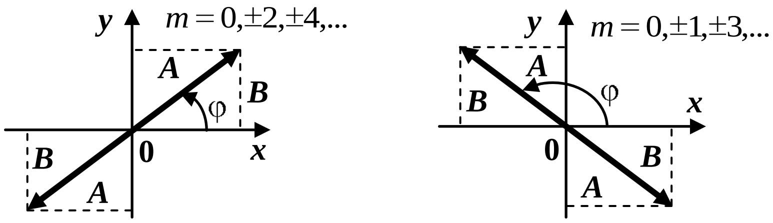

Рис. 3.4

колебаний одинаковой частоты генерируют радиоволны с круговой или линейной поляризацией. Для этого используются антенны с излучателями, расположенными под углом 90° друг к другу. Если на эти излучатели подать синфазные или противофазные синусоидальные напряжения, то излучаемая антенной радиоволна будет линейно поляризованной. Если же напряжения, подаваемые на излучатели, будут сдвинуты на 90°, то излучаемая волна будет обладать круговой поляризацией.

3.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с отличающимися частотами

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются *фигурами Лиссажу*. Форма этих кривых зависит от соотношения ам-

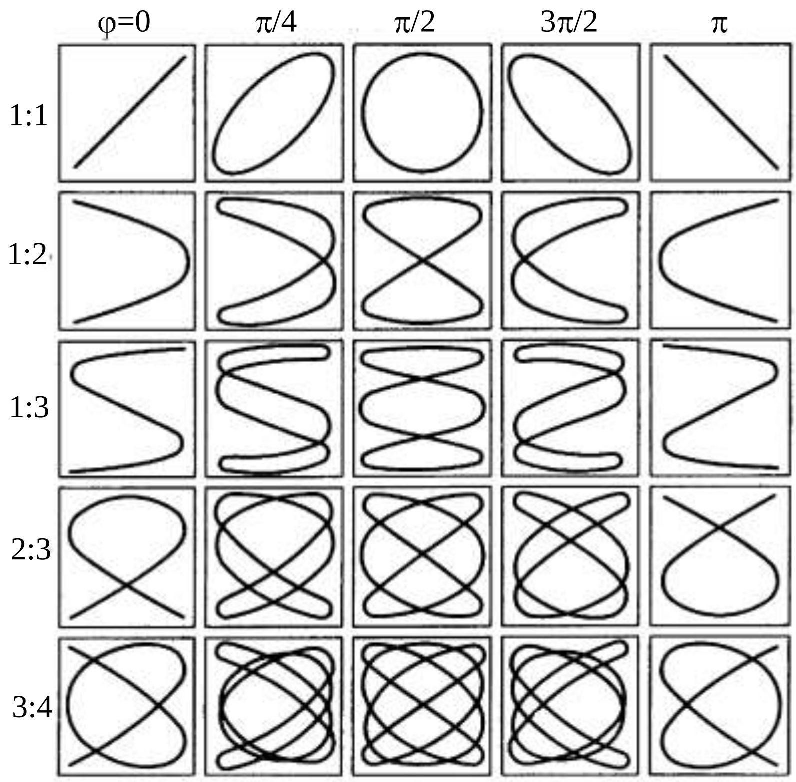

Рис. 3.5

плитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На *рис.3.5* представлены фигуры Лиссажу для некоторых соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны сверху); амплитуды колебаний предполагаются равными.

Видно, что отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний (или неизвестную частоту при сравнении ее с известной). Поэтому анализ фигур Лиссажу – широко используемый метод исследования колебаний.