3. Сложение гармонических колебаний

Система может принимать участие в нескольких колебательных процессах одновременно. Для определения результирующего движения необходимо сложить первичные колебания. Наиболее просто это сделать для гармонических колебаний, отдельные случаи которых мы и рассмотрим ниже. Вопрос о сложении гармонических колебаний важен еще и потому, что сложение периодических движений произвольной формы, в конце концов, посредством разложения их в ряд Фурье также сводится к этой операции.

Вообще, если выполняется принцип суперпозиции, то результирующее движение всегда представляет собой сумму первичных движений, т.е.

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t).$$

В общем случае такое сложение в аналитическом виде может представлять собой весьма трудную задачу, часто решаемую только численными методами. Но в некоторых случаях сложения гармонических колебаний результат получается достаточно просто.

3.1. Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты

Конечно, говорить о "направлении" колебаний можно только при рассмотрении механического движения тел. Тогда первичные колебания описываются изменением одинаковой координаты. При исследовании электрических колебаний "одинаковое направление" следует рассматривать как изменение во времени в складываемых колебаниях одного и того же параметра электрического сигнала (например, напряжения). В биологических системах "одинаковое направление" означает животных одного вида, в химических – одинаковое вещество. Исключительно для наглядности ниже мы будем говорить только о механических колебаниях, хотя, при учете сделанных выше замечаний, все результаты можно применять к колебательной системе любого вида.

Пусть тело участвует в двух колебательных процессах, описываемых уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Воспользуемся векторным представлением гармонических колебаний и построим векторные диаграммы этих колебаний (*рис. 3.1*).

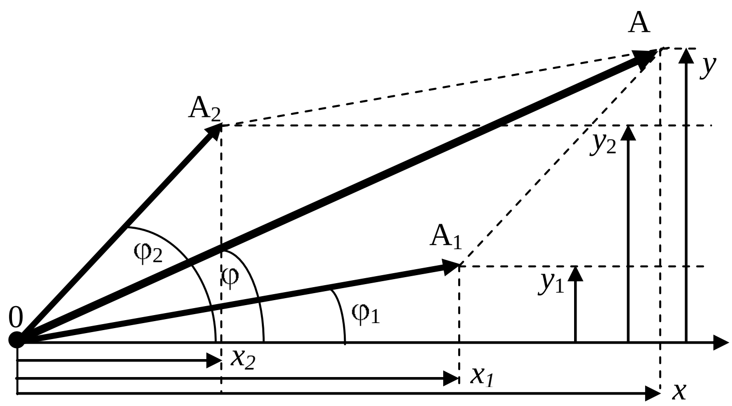

Рис. 3.1

В векторном представлении колебательного процесса длина вектора соответствует амплитуде колебания, а угловая скорость вращения – циклической частоте. Поэтому, амплитуда результирующего колебания будет равна длине вектора, который является суммой векторов первичных колебаний, а частота – скорости вращения этого суммарного вектора. Так как скорость вращения обоих векторов первичных колебаний одинакова, то и скорость вращения суммарного вектора будет, очевидно, такой же. Следовательно, и частота результирующего колебания будет равна частоте первичных колебаний. Тогда уравнение результирующего колебания можно записать в виде:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Из геометрии векторной диаграммы следует, что

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Таким образом, тело, участвующее в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз складываемых колебаний.

Если разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi n, \quad n = 0,1,2,...,$ то $A=A_1+A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Если же разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n+1)\pi, \quad n = 0,1,2,...,$ то $A=|A_1-A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд первичных колебаний.