2. Консервативные линейные колебательные системы

2.1. Полная энергия механических гармонических колебаний

Пусть материальная точка массой m совершает без трения колебания вдоль оси x около положения устойчивого равновесия. Здесь мы сразу же приняли две идеализации – отсутствие трения и точечность материального объекта. Тогда мы можем считать, что колебания точки происходят по гармоническому закону

$$x = A\cos\omega_0 t.$$

Скорость и ускорение точки можно записать в виде:

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t,$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t.$$

Согласно второму закону Ньютона сила, действующая на частицу,

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos\omega_0 t$$

или

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила, действующая на частицу в каждый момент времени, пропорциональна величине смещения частицы из положения равновесия и направлена к положению равновесия (поэтому она иногда называется возвращающей силой).

Кинетическая энергия движения материальной точки

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2\omega_0 t.$$

Т.к. $\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$ то

$$E_k = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}(1 - \cos 2\omega_0 t). \qquad (2.1.1)$$

Потенциальная энергия движения материальной точки

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\omega_0 t.$$

Т.к. $\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$ то

$$E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}(1 + \cos 2\omega_0 t). \qquad (2.1.2)$$

Из выражений (2.1.1) и (2.1.2) видно, величины потенциальной и кинетической энергии точки, колеблющейся по гармоническому закону, изменяются с частотой в два раза большей, чем частота самого колебания.

Сложив (2.1.1) и (2.1.2), получим

$$E_{полн} = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Т.к. $E_{полн}$ не зависит от времени, то полная энергия гармонического осциллятора остается неизменной с течением времени. Вообще, можно показать, что любой гармонический осциллятор является консервативной колебательной системой.

2.2. *Пружинный маятник*

Пружинный маятник является простейшей механической линейной колебательной системой. Он представляет собой массу m, совершающую горизонтальное движение вдоль стержня под действием двух пружин (*рис.2.1*). Чтобы рассмотрение такой системы привело к гармоническому осциллятору, нужно принять следующие допущения (т.е. нужно идеализировать систему).

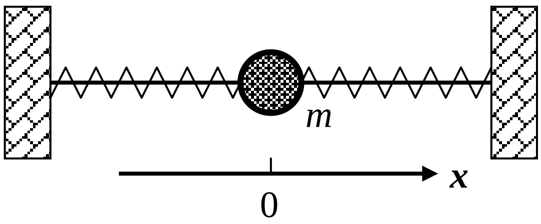

Рис. 2.1

Во-первых, мы должны предположить, что силы, с которыми пружины действуют на груз, пропорциональны смещениям. В действительности с нужной нам степенью точности это соблюдается только в известных пределах, а именно, если смещения достаточно малы, так как пружина при малых деформациях подчиняется закону Гука.

Во-вторых, мы должны предположить, что пружины не обладают внутренним трением, т.е. при растяжении и сжатии пружин энергия не рассеивается, и что система при движении не испытывает сопротивления (нет трения о воздух и поддерживающий стержень). Это второе предположение об отсутствии трения в системе еще с меньшей степенью точности может быть соблюдено в реальной физической системе, чем первое.

При сделанных предположениях движение такой системы может быть описано вторым законом Ньютона

$$F = m\ddot{x},$$

где F – сила, воздействующая на массу со стороны пружин. Она, согласно закону Гука, пропорциональна смещению и направлена в противоположную сторону:

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент упругости пружин.

Приравнивая эти уравнения, получим уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Очевидно, масса m совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

2.3. *Физический маятник*

Это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела (*рис. 2.2*).

Выберем в качестве изменяющейся величины угол α. Второй закон Ньютона для вращательного движения имеет вид:

$$M = J\varepsilon,$$

где М – момент возвращающей силы F_τ для маятника, отклоненного из положения равновесия на угол α; J – момент инерции для маятника относительно оси, проходящей через точку О; ε – угловое ускорение, равное производной угловой скорости по времени.

Т.к. $\varepsilon = \ddot{\alpha}$, то

$$M = J\ddot{\alpha}. \qquad (2.3.1)$$

С другой стороны, по определению,

$$M = F_\tau l. \qquad (2.3.2)$$

Из геометрии рисунка

$$F_\tau = -mgl\sin\alpha \qquad (2.3.3)$$

(знак минус появился из-за того, что сила Fτ всегда противоположна углу α). Чтобы получить уравнение гармонических колебаний необходимо предположить малость максимальных углов отклонения маятника от положения равновесия. Тогда $\sin\alpha \approx \alpha$ и уравнение движения с учетом (1-3) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} = -mgl\alpha$$

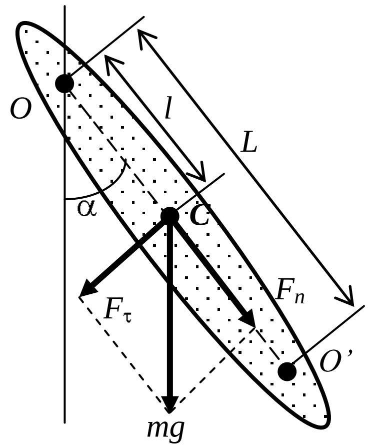

Рис. 2.2

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Это уравнение гармонического осциллятора. Следовательно, изменение угла α описывается уравнением

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Циклическая частота колебаний маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}},$$

а период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \qquad (2.3.4)$$

Если ввести обозначение $L=J/ml$ – приведенная длина физического маятника, то

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Точка O` называется центром качания физического маятника. Точка подвеса O и центр качания O` обладают свойством взаимозаменяемости: если подвесить маятник в точке O`, то частота колебаний не изменится.

2.4. Математический маятник

Это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести (в эксперименте реализуется в виде тяжелого металлического шарика на длинной нити).

Момент инерции материальной точки (а, следовательно, и математического маятника) относительно оси вращения определяется по формуле

$$J = ml^2, \qquad (2.4.1)$$

где l - длина маятника.

Т. к. математический маятник, очевидно, является частным случаем физического маятника, то можно воспользоваться выражением для периода колебаний физического маятника. Подставим (2.4.1) в (2.3.4) и получим известную формулу для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Отсюда видно, что приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

2.5. Биологическая колебательная система (экологическая модель Вольтерра)

Колебательные процессы можно обнаружить и в живой природе. Рассмотрим такую систему. На замкнутом ареале живут два вида животных – жертвы и хищники (например, волки и зайцы). При этом жертвы (зайцы) питаются растительной пищей, которой имеется в избытке, а хищники (волки) питаются только жертвами. Задача состоит в том, чтобы определить закон изменения со временем численности животных обоих видов.

Представим ситуацию, в которой жертвы живут на ареале одни и пищи им хватает (например, кролики в Австралии). Естественно, что в этом случае их численность $N_З$ будет увеличиваться со скоростью (подстрочным индексом *З* будем обозначать все величины, относящиеся к жертвам – зайцам, а индексом *В* – величины, относящиеся к хищникам – волкам)

$$\dot{N}_З = \varepsilon_З N_З,$$

где $\varepsilon_З$ – коэффициент прироста (постоянный и положительный) численности зайцев при отсутствии на ареале хищников и при избытке пищи.

С другой стороны, если бы на замкнутый ареал завезти определенное количество хищников $N_В$ и оставить их без пищи (т.е. без зайцев), то их численность уменьшалась бы со скоростью

$$\dot{N}_B = -\varepsilon_B N_B,$$

где ε_B – коэффициент вымирания (тоже постоянный и положительный).

При проживании на замкнутом ареале животные разных видов будут непременно встречаться. Можно предположить, что частота их встреч пропорциональна $N_В N_З$. Увеличение встреч приводит к уменьшению численности зайцев и способствует увеличению численности волков. Следовательно, для описания численности двух совместно существующих видов животных можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_З &= \varepsilon_З N_З - \gamma_З N_З N_B = N_З(\varepsilon_З - \gamma_З N_B), \\ \dot{N}_З &= -\varepsilon_B N_B + \gamma_B N_З N_B = -N_B(\varepsilon_B - \gamma_B N_З). \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

где $\gamma_З$ – положительный постоянный коэффициент, характеризующий гибель зайцев из-за встречи с волками (этот коэффициент меньше единицы, т.к. не каждая встреча волка с зайцем оканчивается гибелью последнего), а γ_B – положительный постоянный коэффициент, характеризующий прирост численности волков из-за встреч с зайцами.

Предположим, что численности обоих видов животных можно представить в виде двух составляющих – постоянной и переменной:

$$N_З = N_{З0} + n_З, \qquad N_B = N_{B0} + n_B. \qquad (2.5.2)$$

Предположим также, переменные составляющие намного меньше постоянных, т.е.

$$n_З \ll N_{З0}, \qquad n_В \ll N_{В0}. \tag{2.5.3}$$

Очевидно, что постоянные составляющие $N_{З0}$ и $N_{В0}$ соответствуют состоянию равновесия. Поэтому для их определения в уравнения (2.5.1) нужно подставить $\dot N_З = \dot N_В = 0,$ что соответствует состоянию равновесия. Тогда из этих уравнений можно получить

$$N_{В0} = \frac{\varepsilon_З}{\gamma_З}, \qquad N_{З0} = \frac{\varepsilon_В}{\gamma_В}. \tag{2.5.4}$$

Чтобы получить уравнение для скорости изменения численности зайцев, нужно в первое уравнение (2.5.1) подставить (2.5.2). При этом учтем, что $\dot N_З = \dot n_З,$ т.к. $\dot N_{З0} = 0.$

$$\begin{aligned}\dot n_З &= (N_{З0} + n_З)[\varepsilon_З - \gamma_З(N_{В0} + n_В)] = (N_{З0} + n_З)(\varepsilon_З - \gamma_З N_{В0} - \gamma_З n_В) = \\ &= \varepsilon_З N_{З0} + \varepsilon_З n_З - \gamma_З N_{З0} N_{В0} - \gamma_З n_З N_{В0} - \gamma_З n_В N_{В0} - \gamma_З n_В N_{З0} - \gamma_З n_З n_В.\end{aligned}$$

Принимая во внимание неравенства (2.5.3) это последнее уравнение можно линеаризовать. Для этого пренебрежем последним слагаемым ($\gamma_З n_З n_В \to 0$) и подставим в него (2.5.4):

$$\dot n_З = \frac{\varepsilon_З \varepsilon_В}{\gamma_В} + \varepsilon_З n_З - \gamma_З \frac{\varepsilon_В}{\gamma_В}\frac{\varepsilon_З}{\gamma_З} - \gamma_З n_З \frac{\varepsilon_З}{\gamma_З} - \gamma_З n_В \frac{\varepsilon_В}{\gamma_В}.$$

Проведя сокращения, получим

$$\dot n_З = -\gamma_З \frac{\varepsilon_В}{\gamma_В} n_В. \tag{2.5.5}$$

Совершенно аналогично, подставляя (2.5.2) и (2.5.4) в (2.5.1), получим уравнение для скорости изменения численности волков:

$$\dot n_В = \gamma_В \frac{\varepsilon_З}{\gamma_З} n_З. \tag{2.5.6}$$

Продифференцируем (2.5.5) и подставим в него (2.5.6):

$$\ddot n_З = -\frac{\gamma_З \varepsilon_В}{\gamma_В} \dot n_В = -\frac{\gamma_З \varepsilon_В}{\gamma_В}\frac{\gamma_В \varepsilon_З}{\gamma_З} n_З.$$

Или, окончательно

$$\ddot n_З + \varepsilon_З \varepsilon_В n_З = 0.$$

Дифференцируя (2.5.6) и подставим в него (2.5.5), получим

$$\ddot n_В + \varepsilon_З \varepsilon_В n_В = 0.$$

Эти два последние выражения представляют собой дифференциальные уравнения гармонического осциллятора, которые позволяют сделать следующий вывод: численность зайцев и волков на замкнутом ареале изменяется по гармоническому закону с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_B}.$$

Чтобы получить такой результат, нам пришлось идеализировать систему. *Во-первых*, мы посчитали, что ареал замкнутый. *Во-вторых*, мы предположили, что волки питаются только зайцами. *В-третьих*, для линеаризации системы мы допустили, что переменная составляющая изменения численности животных намного меньше постоянной составляющей. Но все эти предположения с какой-то степенью точности могут, в принципе, реализоваться в природе. Поэтому экологическая модель Вольтерра достаточно часто находит подтверждение на практике.

2.6. *Химическая циклическая реакция (модель Лотки)*

Кинетическую схему такой реакции можно записать в виде:

$$\mathrm{A} \xrightarrow{k_0} \mathrm{X} \xrightarrow{k_1} \mathrm{Y} \xrightarrow{k_2} \mathrm{B}$$

Такая запись означает следующее. В некотором объеме находится вещество A, расход которого в процессе реакции пренебрежимо мал (т.е. количество этого вещества избыточно). В процессе реакции нулевого порядка, которая протекает со скоростью k_0, происходит превращение молекул вещества A в молекулы вещества X. На следующем этапе вещество X превращается в вещество Y. Скорость этой реакции второго порядка k_1 прямо пропорциональна концентрации молекул вещества Y. Наконец, в результате реакции первого порядка молекулы Y необратимо распадаются, образуя вещество B. Математически модель реакции Лотки можно записать в виде:

$$\dot{X} = k_0 - k_1 XY, \quad \dot{Y} = k_1 XY - k_2 Y, \quad \dot{B} = k_2 Y. \qquad (2.6.1)$$

Если концентрация X и Y не изменяется во времени, то реакция будет протекать так, что скорость образования B будет постоянной, т.е. $\dot{X} = \dot{Y} = 0$. Тогда

$$k_0 - k_1 X_0 Y_0 = 0, \quad k_1 X_0 Y_0 - k_0 Y_0 = 0, \qquad (2.6.2)$$

где X_0, Y_0 – равновесные концентрации (аналог постоянной численности животных в предыдущем примере). Решив систему (2.6.2), для равновесных концентраций молекул X и Y получим:

$$X_0 = \frac{k_2}{k_1}, \qquad Y_0 = \frac{k_0}{k_2}. \qquad (2.6.3)$$

Предположим, что реакция Лотки вызывает отклонения x и y концентрации молекул X и Y от равновесных значений, притом эти отклонения незначительны, т.е. $x \ll X_0$ и $y \ll Y_0$. Тогда текущая концентрация этих веществ является суммой равновесной концентрации и отклонения концентрации в процессе реакции:

$$X(t) = X_0 + x, \qquad Y(t) = Y_0 + y.$$

Подставим эти суммы в первые два уравнения системы (2.6.1), пренебрежем квадратичным слагаемым второго порядка малости $k_1 xy$, а затем подставим значения равновесных концентраций X_0 и Y_0 из (2.6.3). В результате получим уравнения для скоростей изменения концентрации молекул X и Y:

$$\dot{x} = -k_2 y - \frac{k_1 k_0}{k_2} x, \qquad \dot{y} = \frac{k_1 k_0}{k_2} x.$$

Продифференцируем первое уравнение этой системы, и в полученное выражение подставим второе уравнение:

$$\ddot{x} + \frac{k_1 k_0}{k_2} \dot{x} + k_1 k_2 x = 0.$$

Обозначим $2\delta = \dfrac{k_1 k_0}{k_2}$, $\omega_0^2 = k_1 k_2$. Тогда последнее уравнение приобретает вид:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (2.6.4)$$

Как мы увидим в дальнейшем, это дифференциальное уравнение описывает затухающие гармонические колебания. Следовательно, концентрация молекул веществ X и Y в замкнутом объеме в процессе реакции периодически изменяется (или колеблется) с определенной частотой. Но в отличие от гармонического осциллятора амплитуда этих колебаний уменьшается со временем, т.е. колебания затухают.